

МИНОБРАЗОВАНИЯ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой
Системного анализа и управления

Курбатов

В.Г. Курбатов
31.03.2025 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
Б1.О.16 Функциональный анализ

1. Код и наименование специальности:

01.03.02 прикладная математика и информатика

2. Профиль специализации:

Прикладная математика и компьютерные технологии

3. Квалификация выпускника: *бакалавр*

4. Форма обучения: *очная*

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины: *кафедра системного анализа и управления*

6. Составители программы: *(ФИО, ученая степень, ученое звание)*

Курбатов В. Г., д. ф.-м.н., профессор; Гусева Е.Ю.

7. Рекомендована: Научно-методическим советом факультета прикладной математики, информатики и механики (Протокол № 6 от 17.03.2025)

отметки о продлении вносятся вручную)

8. Учебный год: 2026/27

Семестр: 4

9. Цели и задачи учебной дисциплины:

Целями освоения учебной дисциплины являются:

- изучение студентами теоретических основ функционального анализа, составляющих фундамент ряда математических и прикладных дисциплин;
- развитие умений модифицировать и использовать математические модели функционального анализа для решения прикладных задач;
- формирование навыков логических рассуждений и математической культуры студентов.

Задачи учебной дисциплины:

- познакомить с основными идеями, результатами и принципами функционального анализа: теорией метрических и понятиями полноты и компактности, теорией банаховых и гильбертовых пространств, линейных ограниченных операторов и функционалов, спектральной теории и основным положениям теории интеграла Лебега;
- обучить студентов теоретическим основам курса;
- овладение методами решения как вычислительных, так и теоретических задач;
- формирование компетенций, установленных учебным планом.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП: Дисциплина относится к обязательной части Блока 1. От студентов требуется знание курсов «Алгебры» и «Математического анализа». Данная дисциплина необходима для глубокого понимания курсов «Дифференциальных уравнений», «Уравнений математической физики» и «Методов вычислений». Идеология данной дисциплины используется во многих математических прикладных курсах.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-1	Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1	Демонстрирует знания, относящиеся к базовым дисциплинам математики, информатики и естественных наук.	Знать: знание основ теории Уметь: умение решать типовые задачи, применять методы и идеи дисциплины Владеть: навыками применения полученных знаний в учебной и научной деятельности
		ОПК-1.2	Осуществляет формализацию поставленной задачи и выбирает математические методы для ее решения.	Знать: знание основ теории Уметь: умение формализовывать типовые задачи, выбирать методы их решения Владеть: навыками формализации в учебной и научной деятельности

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час.— 5/180.

Форма промежуточной аттестации: *зачет и экзамен.*

13. Виды учебной работы

Вид учебной работы		Трудоемкость			
		Всего	По семестрам		
			4		...
Аудиторные занятия		96	96		
в том числе:	лекции	48	48		
	практические	48	48		
	лабораторные				
Самостоятельная работа		48	48		
в том числе: курсовая работа (проект)					
Форма промежуточной аттестации (зачет – 0 час. / экзамен – 36 час.)		36	36		
Итого:		180	180		

13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК *
1. Лекции			
1.1	Множества и функции	Бесконечные операции с множествами. Прообразы функций. Отношение эквивалентности. Мощность. Понятие об аксиоме выбора.	Функциональный анализ (ПМИ) https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=29400
1.2	Метрические пространства	Определение метрического пространства. Определение линейного пространства. Определение нормированного пространства. Шары и ограниченные множества. Открытые и замкнутые множества.	Функциональный анализ (ПМИ) https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=29400
1.3	Пределы и полнота	Предел последовательности. Эквивалентные метрики и нормы. Сходимость в K_p и l_p . Сходимость в $C[a,b]$. Пространство $C^1[a,b]$. Полные метрические пространства. Пополнение метрического пространства. Определение банахова пространства. Предел и непрерывность функций.	Функциональный анализ (ПМИ) https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=29400
1.4	Компактность	Компактные множества. Отделимость компактных множеств. Компактность и замкнутость. Множество Кантора. Вполне ограниченные множества. Выделение сходящихся подпоследовательностей. Теорема Вейерштрасса о непрерывных функциях. Критерий компактности в K_p . Критерий компактности в $C[a,b]$. Топологические пространства.	Функциональный анализ (ПМИ) https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=29400
1.5	Принцип сжимающих отображений	Принцип сжимающих отображений. Сжимающие отображения на отрезке. Локализация сжимающего отображения.	Функциональный анализ (ПМИ)

			https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=29400
1.6	Линейные ограниченные операторы	Определение линейного оператора. Ядро и образ линейного оператора. Непрерывные линейные операторы. Норма линейного оператора. Норма оператора, действующего в K^n . Нормы четырех операторов в $C[a,b]$. Пространство линейных операторов. Обратимые линейные операторы.	Функциональный анализ (ПМИ) https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=29400
1.7	Основы спектральной теории	Спектр и резольвентное множество. Формула Бёрлинга–Гельфанда	Функциональный анализ (ПМИ) https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=29400
1.8	Интегральные операторы и уравнения	Операторы Вольтерра. Метод итераций для уравнения Фредгольма. Уравнение Фредгольма с вырожденным ядром	Функциональный анализ (ПМИ) https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=29400
1.9	Евклидовы пространства	Определение евклидова пространства. Ортогональность. Свойства ортогональных систем. Неравенство Бесселя и тождество Парсеваля. Существование ортонормированного базиса в сепарабельном евклидовом пространстве. Гильбертовы пространства. Ортогональное дополнение. Прямая сумма.	Функциональный анализ (ПМИ) https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=29400
1.10	Линейные функционалы	Определение линейного функционала. Непрерывные линейные функционалы. Сопряженное пространство. Сопряженные операторы.	Функциональный анализ (ПМИ) https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=29400
1.11	Мера Лебега	Строение открытых множеств на прямой. Мера открытого множества на прямой. Мера компактного множества на прямой. Мера Лебега. Измеримость и суммируемость неограниченных множеств. σ -алгебры.	Функциональный анализ (ПМИ) https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=29400
1.12	Интеграл Лебега	Измеримые функции. Интеграл Лебега от простых функций. Суммируемые функции. Пренебрежимые множества и функции. Пространство Лебега L^1 . Пространство Лебега L^2 . Понятие о пространствах Лебега L^p .	Функциональный анализ (ПМИ) https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=29400
2. Практические занятия			
2.1	Множества	Бесконечные операции с множествами. Прообразы функций. Отношение эквивалентности. Мощность. Понятие об аксиоме выбора.	Функциональный анализ

			(ПМИ) https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=29400
2.2	Метрические пространства	Определение метрического пространства. Определение линейного пространства. Определение нормированного пространства. Шары и ограниченные множества. Открытые и замкнутые множества.	Функциональный анализ (ПМИ) https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=29400
2.3	Пределы и полнота	Предел последовательности. Эквивалентные метрики и нормы. Сходимость в K_n и l_p . Сходимость в $C[a,b]$. Пространство $C^1[a,b]$. Полные метрические пространства. Пополнение метрического пространства. Определение банахова пространства. Предел и непрерывность функций.	Функциональный анализ (ПМИ) https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=29400
2.4	Компактность	Компактные множества. Отделимость компактных множеств. Компактность и замкнутость. Множество Кантора. Вполне ограниченные множества. Выделение сходящихся подпоследовательностей. Теорема Вейерштрасса о непрерывных функциях. Критерий компактности в K_n . Критерий компактности в $C[a,b]$. Топологические пространства.	Функциональный анализ (ПМИ) https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=29400
2.5	Принцип сжимающих отображений	Принцип сжимающих отображений. Сжимающие отображения на отрезке. Локализация сжимающего отображения.	Функциональный анализ (ПМИ) https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=29400
2.6	Линейные ограниченные операторы	Определение линейного оператора. Ядро и образ линейного оператора. Непрерывные линейные операторы. Норма линейного оператора. Норма оператора, действующего в K_n . Нормы четырех операторов в $C[a,b]$. Пространство линейных операторов. Обратимые линейные операторы.	Функциональный анализ (ПМИ) https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=29400
2.7	Основы спектральной теории	Спектр и резольвентное множество. Формула Бёрлинга–Гельфанда	Функциональный анализ (ПМИ) https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=29400
2.8	Интегральные операторы и уравнения	Операторы Вольтерра. Метод итераций для уравнения Фредгольма. Уравнение Фредгольма с вырожденным ядром	Функциональный анализ (ПМИ) https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=29400
2.9	Евклидовы пространства	Определение евклидова пространства. Ортогональность. Свойства ортогональных систем. Неравенство Бесселя и тождество Парсеваля. Существование ор-	Функциональный анализ

		тонормированного базиса в сепарабельном евклидовом пространстве. Гильбертовы пространства. Ортогональное дополнение. Прямая сумма.	(ПМИ) https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=29400
2.10	Линейные функционалы	Определение линейного функционала. Непрерывные линейные функционалы. Сопряженное пространство. Сопряженные операторы.	Функциональный анализ (ПМИ) https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=29400
2.11	Мера Лебега	Строение открытых множеств на прямой. Мера открытого множества на прямой. Мера компактного множества на прямой. Мера Лебега. Измеримость и суммируемость неограниченных множеств. σ -алгебры.	Функциональный анализ (ПМИ) https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=29400
2.12	Интеграл Лебега	Измеримые функции. Интеграл Лебега от простых функций. Суммируемые функции. Пренебрежимые множества и функции. Пространство Лебега L^1 . Пространство Лебега L^2 . Пространства Лебега L^p .	Функциональный анализ (ПМИ) https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=29400

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1	Множества	4	4		4	12
2	Метрические пространства	4	4		4	12
3	Пределы и полнота	4	4		4	12
4	Компактность	4	4		4	12
5	Принцип сжимающих отображений	4	4		4	12
6	Линейные ограниченные операторы	4	4		4	12
7	Основы спектральной теории	4	4		4	12
8	Интегральные операторы и уравнения	4	4		4	12
9	Евклидовы пространства					
10	Линейные функционалы	4	4		4	12
11	Мера Лебега					
12	Интеграл Лебега	4	4		4	12
13	Подготовка к экзамену	0	0		36	36
	Итого:	48	48		84	180

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Курс предполагает отведение большого числа разделов на самостоятельную работу студентов. Приведенные источники позволяют в полной мере самостоятельно изучить студентами данные разделы.

Материал по каждой теме излагается последовательно с использованием ранее введенных определений, обозначений и доказательств. Необходима постоянная самостоятельная проработка и усвоение изложенного на занятиях материала.

Желателен просмотр материала по данной учебной дисциплине с опережением лекций с использованием рекомендуемой в данной учебной программе литературы.

Приветствуются вопросы студентов по теме учебной дисциплины и смежным вопросам в ходе аудиторных занятий.

При использовании дистанционных образовательных технологий и электронного обучения выполнять все указания преподавателей по работе на LMS-платформе, своевременно подключаться к online-занятиям, соблюдать рекомендации по организации самостоятельной работы.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины (список литературы оформляется в соответствии с требованиями ГОСТ и используется общая сквозная нумерация для всех видов источников)

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Павлов, Е. А. Основы функционального анализа : учебное пособие / Е. А. Павлов. — 2-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2020. — 88 с. — ISBN 978-5-8114-3635-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/116362
	Додонов, А.Е. Функциональный анализ : учебное пособие / А.Е. Додонов – Владимир : Изд-во Владимир. гос. ун-та, 2023. - 144 с. - ISBN 978-5-9984-1715-3. - URL https://dspace.www1.vlsu.ru/bitstream/123456789/10671/1/02501.pdf
2	Власова, Е. А. Элементы функционального анализа : учебное пособие / Е. А. Власова, И. К. Марчевский. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 400 с. — ISBN 978-5-8114-1958-6. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/168870

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
1	Треногин В.А. Функциональный анализ / В.А.Треногин. – М.: Физматлит, 2002. – 488 с.
2	Люстерник Л.А. Краткий курс функционального анализа/Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М.: Лань, 2009. - 272с.
3	Хелемский А.Я. Лекции по функциональному анализу / А.Я. Хелемский. – М.: МЦНМО, 2014. - 560 с.
4	Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Физматлит, 2012. - 572 с.
5	Леонтьева Т.А. Задачи по теории функций и функциональному анализу с решениями. / Т.А. Леонтьева, А.В. Домрина. – М.: Инфра-М, 2013. - 164 с.
6	Курбатов, В. Г. Основы спектральной теории / В. Г. Курбатов, И. В. Курбатова.— Воронеж : Научная книга, 2015.— 122 с.

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)*:

№ п/п	Ресурс
1.	Электронный каталог Научной библиотеки Воронежского государственного университета. – Режим доступа: http://www.lib.vsu.ru
2.	Функциональный анализ (ПМИ) https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=29400
3.	Электронно-библиотечная система «Лань» (доступ осуществляется по адресу: https://e.lanbook.com/).

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы (учебно-методические рекомендации, пособия, задачки, методические указания по выполнению практических (контрольных) работ и др.)

№ п/п	Источник
1	Электронный каталог Научной библиотеки Воронежского государственного университета. – Режим доступа: http://www.lib.vsu.ru
2	Функциональный анализ (ПМИ) https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=29400

17. Информационные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая программное обеспечение и информационно-справочные системы (при необходимости)

Дисциплина реализуется с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий. Для организации занятий рекомендован онлайн-курс Функциональный анализ (ПМИ)/ В.Г. Курбатов — Образовательный портал «Электронный университет ВГУ». — Режим доступа: Функциональный анализ (ПМИ)

<https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=29400>, а также Интернет-ресурсы, приведенные в п.15в.5.

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины.

Учебная аудитория для проведения лекций, практических занятий, организации самостоятельной работы, проведения текущих и промежуточных аттестаций: специализированная мебель, доска (маркерная или меловая) компьютер (ноутбук), мультимедийное оборудование (проектор, экран, средства звуковоспроизведения), допускается использование переносного оборудования.

Программное обеспечение:

ОС Windows 8 (10), интернет-браузер (Google Chrome, Mozilla Firefox), с возможностью подключения к сети «Интернет» и платформе Электронного университета ВГУ (LMS moodle), ПО Adobe Reader, пакет стандартных офисных приложений для работы с документами (MS Office, Мой Офис, Libre Office).

19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Раздел 1. Множества Раздел 2. Метрические пространства Раздел 3. Пределы и полнота Раздел 4. Компактность Раздел 5. Принцип сжимающих отображений Раздел 6. Линейные ограниченные операторы Раздел 7. Основы спектральной теории Раздел 8. Интегральные операторы и уравнения Раздел 9. Евклидовы пространства Раздел 10. Линейные функционалы Раздел 11. Мера Лебега Раздел 12. Интеграл Лебега	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2	Контрольная 1, контрольная 2
Промежуточная аттестация форма контроля – зачет и экзамен				Перечень вопросов см. ниже.

20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1 Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

Образцы вариантов контрольных

Образец заданий к контрольной работе 1

1. Найдите мощность множества точек, лежащих на графике непрерывной функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
2. Вычислите расстояние между функциями $x_1(t) = t + 1$ и $x_2 = \cos t$ в пространстве $C[0, 1]$.
3. Докажите эквивалентность норм $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_\infty$ в K^n .
4. Докажите, что множество $\{x \in C[0, 1] : x(t) < 1\}$ открыто.
5. Сходится ли в l_2 последовательность $x^{(n)} = (2^{-n}, 2^{-(n-1)}, \dots)$?
6. Сформулируйте определение точки прикосновения.
7. Сформулируйте определение предела последовательности в нормированном пространстве.

Образец заданий к контрольной работе 2

1. Докажите непрерывность функционала $f(x) = 3x_1 - x_2 + 2x_4$, заданного на l_{∞} .
2. В $C[0, 1]$ вычислите норму оператора $(\mathcal{A}x)(t) = \int_0^1 e^{t-s} x(s) ds$.
3. Методом последовательных приближений решите следующее интегральное уравнение Вольтерра $x(t) = \int_0^t -x(s) ds + \frac{t^2}{2} + t$, $x_0(t) = 1$.
4. Функцию $f(t) = \frac{\pi - t}{2}$ разложите в комплексный тригонометрический ряд Фурье в пространстве $CL_2[0, 2\pi]$.
5. Найдите сопряженный к следующему оператору, действующему в $CL_2(-\infty, \infty)$: $(\mathcal{A}x)(t) = \alpha(t)x(t+h)$.

Требования к выполнению заданий контрольных (шкалы и критерии оценивания)

Оценка «5» (отлично) выставляется, если обучающийся показывает всесторонние и глубокие знания программного материала, знание основной и дополнительной литературы; последовательно и четко отвечает на вопросы билета и дополнительные вопросы; уверенно ориентируется в проблемных ситуациях; демонстрирует способность применять теоретические знания для анализа практических ситуаций, делать правильные выводы, проявляет творческие способности в понимании, изложении и использовании программного материала; подтверждает полное освоение компетенций, предусмотренных программой.

Оценка «4» (хорошо) выставляется, если обучающийся показывает полное знание программного материала, основной и дополнительной литературы; дает полные ответы на теоретические вопросы, допуская некоторые неточности; правильно применяет теоретические положения к оценке практических ситуаций; демонстрирует хороший уровень освоения материала и в целом подтверждает освоение компетенций, предусмотренных программой.

Оценка «3» (удовлетворительно) выставляется, если обучающийся показывает знание основного материала в объеме, необходимом для предстоящей профессиональной деятельности; при ответе на вопросы не допускает грубых ошибок, но испытывает затруднения в последовательности их изложения; не в полной мере демонстрирует способность применять теоретические знания для анализа практических ситуаций, подтверждает освоение компетенций, предусмотренных программой на минимально допустимом уровне.

Оценка «2» (неудовлетворительно) выставляется, если обучающийся имеет существенные пробелы в знаниях основного учебного материала по разделу; не способен аргументированно и последовательно его излагать, допускает грубые ошибки в ответах, неправильно отвечает на задаваемые преподавателем вопросы или затрудняется с ответом; не подтверждает освоение компетенций, предусмотренных программой.

20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств: зачет и экзамен.

Описание технологии проведения зачета

Средство промежуточного контроля усвоения разделов дисциплины, организованное в виде собеседования преподавателя и обучающегося. Зачет может выставляться по результатам успешного написания контрольных и активного поведения на занятиях. В общем случае в зависимости от результата контрольных количество заданий на зачете может быть сокращено.

Требования к выполнению заданий, шкалы и критерии оценивания

Оценка «зачтено» выставляется, если обучающийся показывает знание основного материала в объеме, необходимом для предстоящей профессиональной деятельности; демонстрирует способность применять теоретические знания для анализа практических ситуаций; выполнил не менее $\frac{2}{3}$ всех предложенных заданий и задач или допустил не более одной грубой ошибки и двух недочетов, не более одной грубой и одной негрубой ошибки, не более трех негрубых ошибок, одной негрубой ошибки и трех недочетов, при наличии четырех-пяти недочетов; допускает незначи-

тельные ошибки при оформлении работы; подтверждает освоение компетенций, предусмотренных программой на минимально допустимом уровне.

Оценка «незачтено» выставляется, если обучающийся имеет существенные пробелы в знаниях основного учебного материала по дисциплине; если число ошибок и недочетов в работе превысило норму для оценки «зачтено» или обучающийся выполнил правильно менее 2/3 всех заданий и задач; допускает грубые ошибки при оформлении работы; не подтверждает освоение компетенций, предусмотренных программой.

Перечень вопросов к экзамену

1. Мощность множества. Понятие об аксиоме выбора.
2. Определение метрического пространства. Примеры.
3. Определение нормированного пространства. Примеры.
4. Открытые и замкнутые шары и ограниченные множества в метрическом пространстве.
5. Открытые множества в метрическом пространстве.
6. Замкнутые множества в метрическом пространстве.
7. Свойства открытых и замкнутых множеств в метрическом пространстве.
8. Предельные точки, эквивалентность трех определений. Связь между точками прикосновения, предельными и граничными точками. Равносильность трех определений замкнутого множества.
9. Плотные подмножества.
10. Предел последовательности в метрическом пространстве.
11. Эквивалентные метрики и нормы.
12. Сходимость в $\mathbb{K}^n$. Эквивалентность любых двух норм. Покоординатное вычисление предела.
13. Сходимость в $\mathbb{R}$. Особенности покоординатного вычисления предела в $\mathbb{R}$.
14. Сходимость в $C[a, b]$, связь с равномерной сходимостью. Свойства равномерной сходимости.
15. Пространство $C^1[a, b]$. Проверка аксиом нормы. Связь сходимости в $C^1[a, b]$ с равномерной сходимостью.
16. Полные метрические пространства. Отсутствие полноты пространства $C[a, b]$.
17. Пополнение метрического пространства. Теорема о существовании пополнения (без доказательства).
18. Определение банахова пространства. Пополнение нормированного пространства.
19. Предел и непрерывность функций. Равномерная непрерывность метрики. Определение непрерывности в терминах прообразов открытых и замкнутых множеств.
20. Два определения компактного множества в метрическом пространстве. Их равносильность.
21. Компактность и замкнутость.
22. Вполне ограниченные множества. Связь с компактностью.

23. Множество Кантора: определение и его мощность.
24. Определение компактного множества в терминах выделения сходящихся подпоследовательностей (без доказательства). Теорема Вейерштрасса о непрерывных функциях (без доказательства).
25. Критерий компактности в $\mathbb{K}^n$.
26. Некомпактность шаров в $\mathbb{R}_2$ и $C[a, b]$.
27. Критерий компактности в $C[a, b]$.
28. Определение линейного оператора. Ядро и образ линейного оператора. Непрерывные линейные операторы. Связь с ограниченностью.
29. Норма линейного оператора: основное свойство, эквивалентность трех определений.
30. Норма оператора, действующего в $\mathbb{K}^n$.
31. Нормы четырех операторов в $C[a, b]$.
32. Пространство линейных ограниченных операторов.
33. Обратимые линейные операторы Теоремы Банаха и Неймана.
34. Спектр и резольвентное множество.
35. Формула Бёрлинга--Гельфанда (без доказательства).
36. Спектр оператора Вольтерра. Решение интегральных уравнений 2-го рода с помощью ряда Неймана.
37. Интегральное уравнение Фредгольма с вырожденным ядром.
38. Определение евклидова пространства. Ортогональность. Свойства ортогональных систем. Единственность разложения по ортогональной системе, формула для коэффициентов.
39. Неравенство Бесселя и тождество Парсеваля.
40. Существование ортонормированного базиса в сепарабельном евклидовом пространстве.
41. Гильбертовы пространства.
42. Ортогональное дополнение. Прямая сумма и ортогональное дополнение.
43. Определение линейного функционала. Непрерывные линейные функционалы.
44. Сопряженное пространство. Теорема Рисса. Евклидов сопряженный оператор.
45. Строение открытых множеств на прямой.
46. Мера открытого множества на прямой.
47. Мера компактного множества на прямой.
48. Мера Лебега ограниченных множеств.
49. Измеримость и суммируемость неограниченных множеств.

50. σ -алгебры. Абстрактная мера. Аксиоматическое определение меры.

51. Измеримые функции.

60. Интеграл Лебега от простых функций.

61. Интеграл Лебега от измеримой функции.

62. Пренебрежимые множества и функции.

63. Пространство Лебега L_1 .

64. Пространство Лебега L_2 .

Образец билета к экзамену

1. Мера компактного множества на прямой.
2. Существование ортонормированного базиса в сепарабельном евклидовом пространстве.
3. Норма линейного оператора.

Описание технологии проведения экзамена

Средство промежуточного контроля усвоения разделов дисциплины, организованное в виде собеседования преподавателя и обучающегося.

Требования к выполнению заданий, шкалы и критерии оценивания

Оценка «отлично» выставляется за глубокое знание предусмотренного программой материала, содержащегося в основных и дополнительных рекомендованных литературных источниках, за умение четко, лаконично и логически последовательно отвечать на поставленные вопросы, за умение анализировать изучаемые явления в их взаимосвязи и диалектическом развитии, применять теоретические положения при решении практических задач; обучающийся подтверждает полное освоение компетенций, предусмотренных программой.

Оценка «хорошо» выставляется за твердое знание основного (программного) материала, включая расчеты (при необходимости), за грамотные, без существенных неточностей ответы на поставленные вопросы, за умение применять теоретические положения для решения практических задач; обучающийся демонстрирует хороший уровень освоения материала и в целом подтверждает освоение компетенций, предусмотренных программой.

Оценка «удовлетворительно» выставляется за общее знание только основного материала, за ответы, содержащие неточности или слабо аргументированные, с нарушением последовательности изложения материала, за слабое применение теоретических положений при решении практических задач; обучающийся подтверждает освоение компетенций, предусмотренных программой на минимально допустимом уровне.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется за незнание значительной части программного материала, за существенные ошибки в ответах на вопросы, за неумение ориентироваться в расчетах, за незнание основных понятий дисциплины; не подтверждает освоение компетенций, предусмотренных программой.

20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ

Вопросы с вариантами ответов

1. Что такое множество?

- a) Совокупность элементов, объединённых в нашем сознании в единое целое.
- b) Произвольная совокупность объектов, обозначенная фигурными скобками.
- c) Количество элементов в объекте.
- d) Множество чисел.

2. Как правильно записать множество, состоящее из чисел 1, 2, 3 и 4?

- a) $\{1,2,3,4\}$
- b) $[1,2,3,4]$
- c) $(1,2,3,4)$
- d) $\langle 1,2,3,4 \rangle$

3. Что означает понятие "элемент множества"?

- a) Объект или число, входящее в множество.
- b) Объект, который не входит в множество.
- c) Объединение двух множеств.
- d) Пересечение двух множеств.

4. Что такое подмножество?

- a) Множество, все элементы которого принадлежат другому множеству.
- b) Множество с меньшим количеством элементов.
- c) Множество без элементов.
- d) Множество с одинаковыми элементами.

5. Что такое пересечение множеств?

- a) Множество элементов, которые принадлежат одновременно обоим множествам.
- b) Объединение двух множеств.
- c) Множество элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств.
- d) Разность двух множеств.

6. Что такое объединение двух множеств?

- a) Множество всех элементов из обоих множеств без повторений: $A \cup B$.
- b) Множество общих элементов: $A \cap B$.
- c) Множество элементов только из первого множества: $A \setminus B$.
- d) Объединение — это пересечение.

7. Что такое метрическое пространство?

- a) Множество с заданной функцией расстояния, удовлетворяющей определённым свойствам.
- b) Множество точек, расположенных на прямой.
- c) Множество с операцией сложения и умножения.
- d) Множество, в котором определены только точки.

8. Как называется функция, задающая расстояние между двумя точками в метрическом пространстве?

- a) Метрика или расстояние.
- b) Вектор.
- c) Функция перехода.
- d) Модуль.

9. Что такое открытый шар в метрическом пространстве?

- a) Множество точек, находящихся на расстоянии меньше некоторого числа от заданной точки.
- b) Множество точек на границе окружности.
- c) Множество точек внутри шара с радиусом равным нулю.
- d) Множество точек, находящихся на расстоянии больше некоторого числа от заданной точки.

10. Что означает сходимости последовательности в метрическом пространстве?

- a) Последовательность сходится к некоторой точке, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N , такой что для всех $n > N$ расстояние между x_n и этой точкой меньше ε .
- b) Последовательность достигает своей максимальной точки после конечного числа шагов.
- c) Последовательность является монотонной и ограниченной.
- d) Последовательность не имеет предела.

11. Что такое полное метрическое пространство?

- a) Пространство, в котором всякая фундаментальная последовательность сходится к пределу внутри этого пространства.
- b) Пространство без пределов последовательностей Коши.
- c) Пространство с конечным числом элементов.
- d) Пространство, где все точки находятся на одинаковом расстоянии.

12. Что такое нормированное пространство?

- a) Векторное пространство, в котором задано норма, определяющая длину векторов.
- b) Множество точек на плоскости без дополнительной структуры.
- c) Множество чисел с операцией деления.
- d) Пространство, в котором все элементы имеют одинаковую длину.

13. Что такое норма в нормированном пространстве?

- a) Функция, которая каждому вектору ставит в соответствие неотрицательное число, удовлетворяющее определённым свойствам.
- b) Произвольная функция без ограничений.
- c) Множество всех возможных расстояний между точками.
- d) Величина, равная длине отрезка.

14. Как определяется сходимости последовательности x_n к пределу x в нормированном пространстве?

- a) Для любого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что для всех $n > N$ $\|x_n - x\| < \varepsilon$.
- b) Последовательность достигает предела после конечного числа шагов.
- c) Последовательность является монотонной и ограниченной.
- d) Расстояние между любыми двумя элементами последовательности равно нулю.

15. Что такое фундаментальная последовательность в нормированном пространстве?

- a) Последовательность, для которой для любого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что для всех $m, n > N$ $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$.
- b) Последовательность, сходящаяся к нулю.

- c) Последовательность с постоянными элементами.
- d) Любая произвольная последовательность.

16. Что означает сходимость последовательности по норме?

- a) Расстояние между членами последовательности и её пределом стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.
- b) Последовательность достигает своего максимума после конечного числа шагов.
- c) Все члены последовательности равны между собой после некоторого номера N .
- d) Расстояние между любыми двумя членами равно постоянной величине.

17. Что означает непрерывность функции $f: X \rightarrow Y$ в точке $x_0 \in X$?

- a) Предел функции при приближении к x_0 равен значению функции в этой точке.
- b) Функция принимает только конечные значения.
- c) В окрестности точки все значения функции одинаковы.
- d) Функция является линейной.

18. Какие свойства характерны для непрерывных функций в нормированных пространствах? (выберите все подходящие):

- a) Непрерывность сохраняется при сложении и умножении на скаляр.
- b) Произвольная последовательность значений функции имеет предел, равный значению функции в пределе точки.
- c) Непрерывные функции сохраняют пределы при сходимости последовательностей.
- d) Непрерывность не зависит от выбора нормы.

19. Как связаны предел и непрерывность функции?

- a) Если функция непрерывна в точке, то её предел при приближении к этой точке равен значению функции там.
- b) Непрерывность всегда означает существование предела во всей области определения.
- c) Предел существует только для линейных функций.
- d) Непрерывность и существование предела — это разные понятия, не связанные между собой.

20. Что означает утверждение "функция является непрерывной на множестве"?

- a) В каждой точке этого множества функция имеет предел, и он совпадает с значением функции в этой точке.
- b) Функция принимает только конечные значения на этом множестве.
- c) Всякое значение функции равно нулю на этом множестве.
- d) Множество области определения — это открытое множество.

21. Что такое компактное множество?

- a) Множество, в котором всякое открытое покрытие содержит конечное подпокрытие.
- b) Множество, содержащее конечное число точек.
- c) Множество, в котором все последовательности сходятся к одной точке.
- d) Множество, которое является открытым.

22. Какие из следующих множеств являются компактными?

- a) Любое замкнутое и ограниченное подмножество в $\mathbb{R}^n$.
- b) Любое открытое и неограниченное множество $\mathbb{R}^n$.
- c) Любое бесконечное множество в $\mathbb{R}$.
- d) Множество, состоящее из бесконечного числа точек без ограничений.

23. Какое из утверждений верно для компактных множеств в метрическом пространстве?

- a) Они замкнуты и ограничены.
- b) Они открыты и связны.
- c) Они только ограничены, но не обязательно замкнуты.
- d) Они всегда связны.

24. В каком случае множество является компактным в арифметическом пространстве $\mathbb{K}^n$?

- a) Если оно замкнуто и ограничено (теорема Больцано–Вейерштрасса).
- b) Если оно открыто и неограниченно.
- c) Если оно содержит бесконечное число точек без ограничения по длине или размеру.
- d) Если оно состоит из конечного числа точек.

25. Что такое сжимающее отображение в полном метрическом пространстве?

- a) Отображение, при котором расстояния между любыми двумя точками уменьшаются или остаются равными.
- b) Непрерывное отображение, при котором существует константа $q \in [0, 1)$, такое что для любых точек x, y выполняется $\rho(f(x), f(y)) \leq q \cdot \rho(x, y)$.
- c) Отображение, которое переводит каждую точку в её окрестность.
- d) Отображение, сохраняющее расстояния.

26. Какое важное свойство имеют сжимающие отображения в полном метрическом пространстве?

- a) Они обязательно являются биекциями.
- b) Они имеют единственную фиксированную точку (теорема о неподвижной точке для сжимающих отображений).
- c) Они всегда открыты.
- d) Они сохраняют расстояния.

27. Что означает "константа сжатия" q ?

- a) Число в интервале $[0, 1)$, показывающее степень сжатия расстояний при отображении.
- b) Любое число больше 1, показывающее расширение расстояний.
- c) Константа равная 0, означающая исчезновение всех точек после отображения.
- d) Константа, равная длине самой длинной дуги в множестве.

28. Какими свойствами обладает последовательность итераций сжимающего отображения?
- a) Она сходится к фиксированной точке независимо от начальной точки при условии полноты пространства.
 - b) Она всегда расходится или не имеет предела.
 - c) Она сходится только если пространство компактно.
 - d) Она не имеет предела.
29. В чем заключается практическое применение теоремы о сжимающих отображениях?
- a) В доказательстве существования решений уравнений и систем уравнений методом итераций (например, метод простых итераций).
 - b) В построении графиков функций на плоскости.
 - c) В определении связности множеств.
 - d) В вычислении интегралов.
30. Что такое евклидово пространство?
- a) Векторное пространство со скалярным произведением.
 - b) Множество всех чисел.
 - c) Пространство, в котором определена только операция сложения.
 - d) Множество точек на плоскости без дополнительной структуры.
31. Какие свойства выполняются для нормы в евклидовом пространстве?
- a) Неотрицательность, однородность и неравенство треугольника.
 - b) Линейность и симметричность.
 - c) Только неотрицательность.
 - d) Только однородность.
32. Что такое ортогональные векторы?
- a) Векторы, для которых их скалярное произведение равно нулю.
 - b) Векторы, равные друг другу.
 - c) Векторы, лежащие на одной прямой.
 - d) Ненулевые векторы с одинаковой длиной.
33. Что означает термин "ортогональный базис"?
- a) Базис, состоящий из попарно ортогональных векторов.
 - b) Базис, где все векторы параллельны друг другу.
 - c) Базис, состоящий только из нулевых векторов.
 - d) Базис, где сумма всех векторов равна нулю.
34. Как называется теорема о разложении произвольного вектора относительно ортогонального базиса?
- a) Теорема о разложении по ортогональному базису или теорема о координатах в ортогональном базисе.
 - b) Теорема Пифагора для произвольных пространств.
 - c) Теорема о существовании единственного базиса.

d) Теорема о равенстве всех длин.

35. Что означает термин "ортонормированный базис"?

- a) Базис из взаимно ортогональных единичных векторов.
- b) Базис из любых произвольных векторов без условий.
- c) Базис, где все векторы параллельны друг другу.
- d) Базис только из нулевых векторов.

36. Что такое гильбертово пространство?

- a) Векторное пространство со скалярным произведением, полное по норме, порождённой этим скалярным произведением.
- b) Множество точек, связанных связью.
- c) Пространство всех непрерывных функций на отрезке.
- d) Множество всех ограниченных последовательностей.

37. Что такое линейный оператор?

- a) Функция, отображающая вектор в число.
- b) Отображение между двумя векторными пространствами, сохраняющее операции сложения и умножения на скаляр.
- c) Произведение двух векторов.
- d) Вектор, который преобразуется в нулевой при применении оператора.

38. Что такое ядро линейного оператора?

- a) Множество всех векторов, которые отображаются в нулевой вектор.
- b) Множество всех образов векторов под действием оператора.
- c) Образ отображения.
- d) Множество всех собственных значений.

39. Что такое образ линейного оператора?

- a) Множество всех векторов, которые можно получить как результат применения оператора к некоторому вектору.
- b) Множество всех собственных векторов.
- c) Множество всех нулевых векторов.
- d) Множество всех базисных векторов.

40. Что такое норма линейного оператора $A: V \rightarrow V$ в нормированном пространстве?

- a) Максимальное значение $\|Ax\|$ при $\|x\|=1$.
- b) Минимальное значение $\|Ax\|$ при $\|x\|=1$.
- c) Среднее значение $\|Ax\|$ по всем x .
- d) Произведение всех собственных значений оператора.

41. Какое из утверждений верно для нормы линейного оператора A ?

- a) $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ для всех x .
- b) $\|Ax\| = \|A\| + \|x\|$.
- c) $\|Ax\|$ не зависит от x .

d) $\|Ax\|$ всегда равно нулю.

42. Что означает, что оператор $A:V \rightarrow V$, где V — нормированное пространство, является ограниченным?

a) Его норма конечна.

b) Он отображает любой вектор в нулевой вектор.

c) Он имеет только конечномерный образ.

d) Он обязательно самосопряжён.

43. Что такое линейный функционал?

a) Отображение из векторного пространства в поле, которое сохраняет сложение и умножение на скаляр.

b) Вектор, который задаёт направление в пространстве.

c) Операция, которая переводит вектор в число, не обладающее линейностью.

d) Множество всех векторов с одинаковой длиной.

44. В каком случае линейный функционал называется непрерывным?

a) Если существует константа C , такая что $|f(x)| \leq C\|x\|$ для всех x .

b) Если он отображает все векторы в ноль.

c) Если он не зависит от выбора базиса.

d) Если он является ограниченным оператором.

45. Что такое интегральный оператор Фредгольма?

a) Оператор вида $(Af)(x) = \int_a^b K(x,t)f(t)dt$, где $K(x,t)$ — заданная функция (ядро).

b) Оператор, задаваемый дифференциальным уравнением.

c) Оператор, который отображает функцию в её производную.

d) Оператор, задаваемый через сумму значений функции.

46. Как определяется мера Лебега на интервале (a,b) ?

a) Она равна длине интервала: $b-a$.

b) Она равна площади фигуры внутри интервала.

c) Она равна количеству точек внутри интервала.

d) Она равна нулю.

47. Что такое множество суммируемое (измеримое) по Лебегу?

a) Множество, для которого определена мера.

b) Любое множество конечной длины.

c) Множество, содержащее только конечное число точек.

d) Множество, которое является открытым.

48. Что означает мера нуль?

a) Множество имеет меру Лебега равную нулю (например, счетное множество точек).

b) Множество содержит только одну точку.

c) Множество имеет бесконечную меру.

d) Множество не является измеримым.

d) Интеграл, который всегда равен нулю.

49. В чем заключается основное отличие интеграла Лебега от интеграла Римана?

- a) Он определен на более широком классе функций.
- b) Он используется только для функций с конечным числом разрывов.
- c) Он всегда равен площади фигуры, ограниченной графиком функции.
- d) Он не зависит от меры области.

50. Что означает свойство монотонности интеграла Лебега?

- a) Если $f \leq g$ почти всюду, то $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.
- b) Интеграл любой функции не может быть отрицательным.
- c) Интеграл сохраняет знак функции при возрастании функции.
- d) Интеграл равен нулю для всех функций.

Вопросы с кратким текстовым ответом

1. Как называют множество, всякое покрытие которого открытыми множествами содержит конечное подпокрытие?

Ответ: Компактным

2. Как называют функцию, для которой прообраз любого промежутка вида $(-\infty, b)$ является измеримым множеством?

Ответ: Измеримой

Вопросы с вариантами ответов

1. Какую из следующих формул называют неравенством треугольника?

- a) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
- б) $\langle x, y \rangle \leq \|x\| \|y\|$
- в) $\sum_{k=1}^n |c_k| \leq \|x\|$
- г) $\|fg\|_{L_1} \leq \|f\|_{L_p} \|g\|_{L_q}$

Ответ: а)

2. Из чего состоит сопряженное к нормированному пространству?

- а) из всевозможных линейных ограниченных функционалов, определенных на этом пространстве
- б) из операторов, действующих в этом пространстве
- в) из всевозможных подмножеств этого пространства
- г) из всевозможных подпространств этого пространства

Ответ: а)

3. Подмножество $\mathbb{R}^n$ является компактным, если

- а) оно замкнуто и ограничено

- б) оно совпадает со всем $\mathbb{R}^n$
- в) на нем задано скалярное произведение
- г) оно непрерывно

Ответ: а)

4. Точку x_* называют неподвижной точкой отображения F , если

- а) $F(x_*) = x_*$
- б) $F(x_*) = 0$
- в) $\rho(F(x), F(y)) \leq q \rho(x, y)$
- г) $x_{n+1} = F(x_n)$

Ответ: а)

5. Что называют мерой Лебега ограниченного множества на прямой?

- а) общее значение его внешней и внутренней мер
- б) длину наименьшего отрезка, содержащего это множество
- в) наибольшую длину содержащегося в нем интервала
- г) число содержащихся в нем точек

Ответ: а)

6. Каким из перечисленных ниже свойств не обладает функция Дирихле

$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально} \end{cases}$, рассматриваемая на множестве определения $[-1, 1]$?

- а) непрерывность
- б) измеримость
- в) суммируемость
- г) ограниченность

Ответ: а)

Вопросы с кратким текстовым ответом

1. Как называют линейное пространство, на котором задана норма?

Ответ: Нормированным

2. Как называют нормированное пространство, в котором каждая фундаментальная последовательность имеет предел?

Ответ: Полным или банаховым.

Описание технологии проведения:

В исключительных случаях (переход на удаленный режим занятий и т.п.) текущая аттестация может проводиться в виде теста.

Текущая аттестация проводится на занятии одновременно во всей учебной группе в виде теста в электронной образовательной среде «Электронный университет ВГУ». Большая часть вопросов проверяется автоматически, проверки преподавателем с ручным оцениванием требуют только отдельные вопросы, представленные в форме эссе. Ограничение по времени на каждую попытку — 30 минут

Критерии и шкалы оценивания заданий ФОС:

Для оценивания выполнения заданий используется балльная шкала:

1) закрытые задания (тестовые с вариантами ответов, средний уровень сложности):

1 балл – указан верный ответ;

0 баллов – указан неверный ответ (полностью или частично неверный).

2) открытые задания (тестовые с кратким текстовым ответом, повышенный уровень)

2 балла – указан верный ответ;

0 баллов – указан неверный ответ (полностью или частично неверный).

Задания раздела 20.3 рекомендуются к использованию при проведении диагностических работ в случае чрезвычайных ситуаций, связанных с переходом на удаленное обучение.