

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

**УТВЕРЖДАЮ**

Заведующий кафедрой  
математического моделирования



М.Ш. Бурлуцкая

26.06.2022 г.

## **РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

### **Б1.В.ДВ.02.01 Теория бескоалиционных игр**

- 1. Код и наименование направления подготовки:** 01.04.04 Прикладная математика
- 2. Профиль подготовки:** Применение математических методов к решению инженерных и экономических задач
- 3. Квалификация выпускника:** Магистр
- 4. Форма обучения:** Очная
- 5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:**  
Кафедра математического моделирования
- 6. Составитель программы:** Сухочева Людмила Ивановна, к.ф.-м.н., ст.н.с.
- 7. Рекомендована:** Научно-методическим советом математического факультета, протокол № 0500-03 от 24.03.2022
- 8. Учебный год:** 2023/2024                      **Семестр:** 3

## 9. Цели и задачи учебной дисциплины

*Целями освоения учебной дисциплины являются:*

изучение положений теории матричных бескоалиционных игр и принципов построения стратегий игроков.

*Основной задачей учебной дисциплины является:*

формирование умения построения оптимальных в соответствующем смысле стратегий и применение теоретических построений к решению конкретных практических задач, развитие логического мышления.

## 10. Место учебной дисциплины в структуре ОПОП:

Учебная дисциплина Б1.В.ДВ.02.02 Теория бескоалиционных игр относится к части, формируемой участниками образовательных отношений дисциплин по выбору Блока 1.

Полноценное восприятие основных концепций дисциплины предполагает наличие базовых знаний основных разделов математики.

Приобретенные в результате обучения знания, умения и навыки могут быть использованы при продолжении образования и в дальнейшей трудовой деятельности выпускников.

## 11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

| Код  | Название компетенции   | Код(ы) | Индикатор(ы)  | Планируемые результаты обучения   |
|------|--|--------|---|---|
| ПК-1 | Способность проводить научные исследования, на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности. | ПК-1.1 | Владеет современными методами сбора и анализа исследуемого материала, способами его аргументации. Владеет навыками научных обзоров, публикаций, рефератов и библиографий по тематике проводимых исследований. | Знать:<br>- основные понятия и определения теории антагонистических матричных игр;<br>- принципы построения стратегий.<br>Уметь:<br>- доказывать существование решений, удовлетворяющих принципам оптимальности, строить алгоритмы нахождения таких решений.<br>Владеть:<br>- современными методами сбора и анализа исследуемого материала, способами его аргументации; навыками научных обзоров, публикаций, рефератов и библиографий по тематике проводимых исследований. |
|      |  | ПК-1.2 | Умеет находить, формулировать и решать научно-исследовательские задачи в профессио-   | Знать:<br>- основные принципы использования теоретических постулатов для решения прикладных практических задач.<br>Уметь:<br>- находить, формулировать и решать научно-исследовательские задачи в профессиональной деятельности.<br>Владеть:  |

|      |  |        |   |  |
|------|--|--------|---|--|
| ПК-2 | Способен руководить проектами по созданию и эксплуатации программного обеспечения для решения инженерных и экономических задач | ПК-2.2 | Умеет принимать управленческие решения и оценивать риски проектов | <p>нальной деятельности.</p> <p>- приемами теории игр для построения соответствующей математической модели исходя из конкретной практической задачи в конкретной профессиональной области.</p> <p>Знать:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- принципы оптимального поведения;</li> </ul> <p>Уметь:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- доказывать существование решений, удовлетворяющих принципам оптимальности, строить алгоритмы нахождения таких решений.</li> </ul> <p>Владеть:</p> <p>Навыками оценки с позиции теории игр рисков проектов и принимаемых решений в инженерных и экономических задачах.</p> |
|------|--|--------|---|--|

**12. Объем дисциплины в зачетных единицах/часах в соответствии с учебным планом — 2/72.**

**Форма промежуточной аттестации – зачет.**

**13. Трудоемкость по видам учебной работы**

| Вид учебной работы                     | Трудоемкость |              |    |
|--|--------------|--------------|----|
|  | Всего        | По семестрам |    |
|  |              | Несеместра 7 |    |
| Аудиторные занятия                     | 20           | 20           |    |
| в том числе:                           | лекции       | 10           | 10 |
|  | практические | 10           | 10 |
|  | лабораторные | -            | -  |
| Самостоятельная работа                 | 52           | 52           |    |
| в том числе: курсовая работа (проект)  | -            | -            |    |
| Форма промежуточной аттестации - зачет | -            | -            |    |
| Итого:                                 | 72           | 72           |    |

**13.1. Содержание дисциплины**

| п/п              | Наименование раздела дисциплины | Содержание раздела дисциплины  | Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК * |
|------------------|---------------------------------|--|--|
| <b>1. Лекции</b> |                                 |  |  |
| 1.1              | Матричные игры. Введение.       | Определение антагонистической игры в нормальной форме. Понятие стратегии, функции выигрыша. Пример (Оборона города). | -  |

|                                |   |   |   |
|--------------------------------|---|---|---|
| 1.2                            | Максиминные и минимаксные стратегии. Ситуация равновесия.                                     | Принцип минимакса, минимаксная (максиминная) стратегия. Об оптимальном поведении игроков в антагонистической игре. Определение ситуации равновесия или седловой точки. Значение игры, оптимальные стратегии Лемма о масштабе. Необходимое и достаточное условие равновесия. | - |
| 1.3                            | Смешанное расширение игры. Существование решения матричной игры в классе смешанных стратегий. | Понятие смешанной стратегии, спектра стратегии. О стратегической эквивалентности смешанных расширений. Основная теорема матричных игр.  | - |
| 1.4                            | Свойства оптимальных стратегий и значения игры. Доминирование стратегий.                      | Теорема о выпуклости множества оптимальных смешанных стратегий. Геометрическое решение $(2 \times n)$ -игры. Существенная или активная стратегия. Доминирование. Теорема об оптимальности доминируемой стратегии.   | - |
| 1.5                            | Вполне смешанные и симметричные игры  | Определение вполне смешанной стратегии Теорема о единственности решения вполне смешанной игры Пример $((2 \times 2) -$ игры Свойства решения симметричной игры  | - |
| <b>2. Практические занятия</b> |   |   |   |
| 1.1                            | Введение.   | Основные понятия и определения. Примеры (Игра на уклонение, дискретная игра типа дуэли, игра «нападение — защита», игра дискретного поиска, поиск «шумного» объекта).   | - |
| 1.2                            | Максиминные и минимаксные стратегии. Ситуация равновесия.                                     | Связь между принципом равновесия и принципами минимакса и максимина в антагонистической игре.   | - |
| 1.3                            | Смешанное расширение игры. Существование решения матричной игры в классе смешанных стратегий. | Некоторые сведения из теории выпуклых множеств и систем линейных неравенств.  | - |
| 1.4                            | Свойства оптимальных стратегий и значения игры. Доминирование стратегий.                      | Сведение задачи линейного программирования к решению матричной игры. Пример $((m \times 2)$ -игра). Пример [Sakaguchi, 1973]. Игра с матрицей четвертого порядка.   | - |
| 1.5                            | Вполне смешанные и симметричные игры.   | Пример вполне смешанной игры с матрицей третьего порядка.   | - |
| 16                             | Контрольная работа.   | Выполнение индивидуальных заданий.  |   |

### 13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

| № п/п | Наименование темы (раздела) дисциплины | Виды занятий (количество часов) |              |              |                        |       |
|-------|--|---------------------------------|--------------|--------------|------------------------|-------|
|       |  | Лекции                          | Практические | Лабораторные | Самостоятельная работа | Всего |
| 1.1   | Матричные игры. Введение.              | 2                               | 2            | -            | 8                      | 12    |
| 1.    | Максиминные и                          | 2                               | 2            |              | 10                     | 14    |

|         |   |    |    |   |    |    |
|---------|---|----|----|---|----|----|
| 2       | минимаксные стратегии. Ситуация равновесия.   |    |    |   |    |    |
| 1.<br>3 | Смешанное расширение игры. Существование решения матричной игры в классе смешанных стратегий. | 2  | 2  | - | 10 | 14 |
| 1.<br>4 | Свойства оптимальных стратегий и значения игры. Доминирование стратегий.                      | 2  | 2  | - | 10 | 14 |
| 1.<br>5 | Вполне смешанные и симметричные игры  | 2  | 1  | - | 10 | 13 |
| 1.<br>6 | Контрольная работа  | -  | 1  | - | 4  | 5  |
|         | Итого:  | 10 | 10 | - | 52 | 72 |

#### 14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Аудиторная работа в рамках дисциплины Теория бескоалиционных игр предусматривает лекции по ключевым и проблемным вопросам и проведение практических занятий с целью закрепления теоретических знаний.

Учебная дисциплина предполагает наличие определенных знаний теории вероятностей. Отсюда вытекает необходимость вначале изучения данного курса в самостоятельную работу обучающихся включить повторение соответствующих разделов теории вероятностей.

В целом, самостоятельная работа обучающихся направлена на формирование навыков работы с различными источниками, систематизации полученной информации, решения задач. Модельные примеры, иллюстрирующие применение основных теоретических понятий, обеспечивают понимание излагаемого теоретического материала и являются основой для самостоятельного выполнения практических заданий.

Для успешного освоения дисциплины рекомендуется внимательное изучение конспектов лекций, материалов практических занятий, работа с основной и дополнительной литературой.

#### 15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины (список литературы оформляется в соответствии с требованиями ГОСТ и используется общая сквозная нумерация для всех видов источников)

##### а) основная литература:

| №п/п | Источник   |
|------|--|
| 1    | Петросян Л.А. Теория игр: Учебник/ Под ред. Петросяна Л.А. / Л.А. Петросян, Н.А. Зенкевич, Е.В. Щевкопляс. — СПб.:Издательство «БХВ-Петербург», 2012. — 432 с.: ил. — (Учебная литература для вузов. Специальная литература)<br>Режимдоступа <a href="https://www.rulit.me/data/programs/resources/pdf/Teoriya_igr_RuLit_Me_571132.pdf">https://www.rulit.me/data/programs/resources/pdf/Teoriya_igr_RuLit_Me_571132.pdf</a> |

|   |  |
|---|--|
| 2 | <i>Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1981, с. 389.</i> |
|---|--|

**б) дополнительная литература:**

| №п/п | Источник  |
|------|---|
| 3    | <i>Воробьев Н. Н. Основы теории игр. Бескоалиционные игры. — М.: Наука, 1984. — 496 с.</i><br>Режим доступа <a href="https://bookree.org/reader?file=1347930&amp;pg=2">https://bookree.org/reader?file=1347930&amp;pg=2</a> |

**в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)\*:**

| №п/п | Ресурс   |
|------|--|
| 4    | <i>Электронный каталог Научной библиотеки Воронежского государственного университета. — (<a href="http://www.lib.vsu.ru/">http // www.lib.vsu.ru/</a>)</i> |
| 5    | <i>Электронно-библиотечная система «Издательства Лань». — (<a href="https://e.lanbook.com/">https://e.lanbook.com/</a>)</i>                                |
| 6    | <i>Электронно-библиотечная система "Консультант студента". — (<a href="http://www.studentlibrary.ru/">http://www.studentlibrary.ru/</a>)</i>               |
| 7    | <i>Официальный сайт мехмата МГУ <a href="http://www.math.msu.ru">http://www.math.msu.ru</a></i>  |

**16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы**  
(учебно-методические рекомендации, пособия, задачки, методические указания по выполнению практических (контрольных), курсовых работ и др.)

| №п/п | Источник   |
|------|--|
| 1    | <i>Благодатских А.И., Петров Н. Н. Сборник задач и упражнений по теории игр: Учебное пособие. — СПб.: Издательство «Лань», 2014. — 304 с. — (Учебники для вузов. Специальная литература)</i> |

**17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ), электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):**

Основными формами аудиторных занятий при изучении дисциплины являются лекции и практические занятия. В основу методологии обучения данной дисциплине целесообразно положить, образовательные технологии, предусматривающие активное вовлечение обучающихся в процесс обучения.

При реализации дисциплины могут проводиться различные типы лекций (вводная, обзорная, проблемная, и т.д.). Содержание лекции должно отвечать следующим дидактическим требованиям:

- изложение материала от простого к сложному, от известного к неизвестному;
- логичность, четкость и ясность в изложении материала;
- опора смысловой части лекции на подлинные факты, события, явления, статистические данные;
- тесная связь теоретических положений и выводов с практикой и будущей профессиональной деятельностью обучающихся.

**18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:**


---

Учебная аудитория; специализированная мебель.

---

## 19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

| №п/п   | Наименование раздела дисциплины (модуля)  | Компетенция(и) | Индикатор(ы) достижения компетенции | Оценочные средства                       |
|--|---|----------------|-------------------------------------|--|
| 1.   | Матричные игры. Введение.   | ПК-1, ПК-2     | ПК-1.1, ПК-1.2, ПК-2.2              | Перечень вопросов. Научный обзор         |
| 2.   | Максиминные и минимаксные стратегии. Ситуация равновесия.                                     | ПК-1, ПК-2     | ПК-1.1, ПК-1.2, ПК-2.2              | Перечень вопросов, практические задания. |
| 3.   | Смешанное расширение игры. Существование решения матричной игры в классе смешанных стратегий. | ПК-1, ПК-2     | ПК-1.1, ПК-1.2, ПК-2.2              | Перечень вопросов, практические задания. |
| 4.   | Свойства оптимальных стратегий и значения игры. Доминирование стратегий.                      | ПК-1, ПК-2     | ПК-1.1, ПК-1.2, ПК-2.2              | Перечень вопросов, практические задания. |
| 5.   | Вполне смешанные и симметричные игры  | ПК-1, ПК-2     | ПК-1.1, ПК-1.2, ПК-2.2              | Перечень вопросов, практические задания. |
| 6.   | Контрольная работа  | ПК-1, ПК-2     | ПК-1.1, ПК-1.2, ПК-2.2              | Практические задания.                    |
| Промежуточная аттестация<br>форма контроля - зачет |   |                |                                     | Практическое задание                     |

## 20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

### 20.1 Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

#### 1. Примерный перечень вопросов.

1. Определение антагонистической игры в нормальной форме.
2. Понятие стратегии, функции выигрыша.
3. Понятие подыгры.
4. Максиминные и минимаксные стратегии.

- 5 Значение игры.
6. Ситуации равновесия. Понятие седловой точки
- 7 Связь между принципом равновесия и принципами минимакса и максимина.
- 8 Необходимое и достаточное условие равновесия.
9. Понятие и свойства выпуклых множеств.
10. Крайняя точка.
11. Выпуклая оболочка. Конус.
12. Теорема двойственности.
13. Понятие смешанной стратегии.
14. Основная теорема матричных игр.
15. Необходимое и достаточное условие ситуации равновесия в игре.
16. Геометрическое решение игр с двумя стратегиями.
17. Определение существенной или активной стратегии.
18. Игра «нападение-защита».
19. Понятие доминирования стратегии.
20. Эквивалентные стратегии.
21. Теорема об оптимальности доминируемой стратегии.
22. Определение вполне смешанной стратегии.
- 2.3 Теорема о единственности решения вполне смешанной игры.

## 2. Научный обзор

- 1 Современные достижения в теории игр.
- 2 Теория игр в прикладных задачах.
- 3 Библиографический обзор по теории игр в современной периодической печати.

## 3. Примерный перечень практических заданий.

1. Каждый из двух игроков показывает другому  $m$  пальцев на руке, ( $1 \leq m \leq n$ ,  $n \leq 5$ ) и одновременно называет число пальцев, которое, по его мнению, может показать противник. Если один игрок угадывает правильно, а другой неправильно, то тот, который угадал, выигрывает сумму, равную числу пальцев, показанных обоими игроками. Во всех остальных случаях выигрыши обоих игроков считаются нулевыми.
  - а) Сколько стратегий имеет каждый игрок при  $n = 3$ ?
  - б) Построить матрицу игры для  $n = 2$ .

2. Найти ситуации равновесия и значение следующей игры:
  - а) матрица третьего порядка:

$$\begin{array}{ccc} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & -1 & 7/4 \end{array}$$

3. Показать, что строго доминируемая стратегия не может быть существенной.
4. Решить игру поиска с одной попыткой. Игрок 2 прячет предмет в одну из  $n$  ячеек. Игрок 1 ищет его в одной из этих ячеек, при этом вероятность обнаружения



предмета в  $i$ -й ячейке равна  $\beta_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$  (при условии, что он там находится). Показать, что рассматриваемая игра вполне смешанная. Найти решение игры.

5. Решить дискретную игру типа дуэли с пяти шагов и одним выстрелом у каждого игрока:

Игроки продвигаются навстречу друг другу на  $n$  шагов. После каждого сделанного шага игрок может выстрелить или нет, но во время игры он может выстрелить только один раз. Считается, что вероятность того, что игрок попадает в своего противника, если выстрелит, продвинувшись на  $k$  шагов, равна  $k/n$  ( $k \leq n$ ). Стратегия игрока 1(2) заключается в принятии решения стрелять на  $i$ -м ( $j$ -м) шаге.

#### 4. Примерные содержание заданий контрольной работы

1. Распределение поисковых усилий. В одной из  $n$  ячеек игрок 2 прячет предмет. Игрок 1 имеет в распоряжении  $g$  ищущих, которые должны быть распределены по ячейкам для поиска предмета. Например, в первую ячейку могут быть направлены  $(g - 1)$  ищущих, один—во вторую ячейку, а в остальные ячейки — ни одного и т. п.

Предполагается, что известна вероятность обнаружения предмета в  $i$ -й ячейке (если он там находится) при поиске одним ищущим. Обнаружение предмета каждым из ищущих — независимые события. Выигрыш игрока 1 — вероятность обнаружения предмета при заданном распределении ищущих.

a) Вычислить число  $m$  чистых стратегий игрока 1.

b) Построить матрицу игры.

2. Найти ситуации равновесия и значение следующей игры:

матрица второго порядка:

$$\begin{array}{cc} 3 & 5 \\ 3 & 2 \end{array}$$

3. Показать, что выбор 1-го столбца эквивалентен смешанной стратегии

$$y = (0, 1/3, 2/3), \text{ где матрица игры имеет вид: } \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{array}$$

#### 20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация по дисциплине проводится в форме зачета.

#### Примерное содержание практических заданий:

##### Задание № 1

Поиск многих предметов.

Игрок 2 прячет  $m$  черных шаров в  $n$  урнах. Общее количество шаров (черных и белых), находящихся в  $j$ -й урне, равно  $l_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $l_j > m$ . Противник (игрок 1) старается обнаружить максимальное число черных шаров, имея возможность проверить одну из урн. При проверке  $i$ -й урны игрок 1 наугад (равновероятно) выбирает  $m$  шаров из  $l_i$  и его выигрыш равен математическому ожиданию количества черных шаров в выборке из  $m$  шаров.

a) Пусть в  $i$ -й урне спрятаны  $p_i$  черных шаров. Вычислить вероятность  $\beta_{ij}$  того, что выбранная из  $i$ -й урны группа  $g$  шаров содержит ровно  $j$  черных.

b) Построить матрицу игры.

##### Задание № 2

Противовоздушная оборона.

В системе ПВО объекта могут применяться три типа средств поражения воздушной цели (1, 2, 3), которые должны быть распределены между двумя стартовыми установками. У противника (игрока 2) имеется два типа самолетов (тип 1 и тип 2). Вероятности поражения самолетов одним средством сведены в матрицу

|     |     |
|-----|-----|
| 0,3 | 0,5 |
| 0,5 | 0,3 |
| 0,1 | 0,6 |

Предполагается, что возможно нападение только одним из самолетов. Выигрыш игрока 1 — вероятность поражения самолета системой ПВО.

- Построить матрицу игры.
- Выяснить, имеется ли решение в чистых стратегиях.

### Задание № 3

Решить графически игру с матрицей

|    |    |
|----|----|
| -4 | 0  |
| 3  | -2 |
| 5  | -3 |
| -1 | -1 |

Для оценивания результатов обучения на зачёте используются следующие показатели:

**Знание:**

- основных понятий и определений теории антагонистических матричных игр;
- принципов оптимального поведения;
- основ использования теоретических постулатов для решения прикладных практических задач.

**Умения:**

- доказывать существование решений, удовлетворяющих принципам оптимальности;
- строить алгоритмы нахождения таких решений; находить, формулировать и решать научно-исследовательские задачи в профессиональной деятельности

**Владение:**

- современными методами анализа исследуемого материала, способами его аргументации;
- навыками научных обзоров, публикаций, рефератов и библиографий по тематике проводимых исследований;
- приемами теории игр для построения соответствующей математической модели, исходя из конкретной практической задачи в конкретной профессиональной области.

Проверка приобретенных знаний, умений и навыков, освоенных компетенций проводится на основе выполнения практических заданий, ответов на вопросы.

Обучающийся должен выполнить соответствующие вычисления, представить анализ полученного решения, интерпретацию результатов, выводы и заключения по заданию, ответить на вопросы.

| Критерии оценивания компетенций | Уровень сформированности | Шкала оценок |
|---------------------------------|--------------------------|--------------|
|---------------------------------|--------------------------|--------------|

|  | компетенций                             |           |
|--|---|-----------|
| Владение терминологией, правильное использование алгоритма выполнения и верная интерпретация результата, при этом допускаются незначительные неточности. | Пороговый уровень и/или выше порогового | Зачтено   |
| Плохое владение материалом: ответ неверен, отсутствуют выводы, либо они не верны, отсутствие ориентации в предмете.                                      | Ниже порогового уровня                  | Незачтено |