

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой  
математической физики  
и информационных технологий



С.А. Переселков

28.06.2022г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

**Б1.О.11.03 Линейная алгебра**

**1. Код и наименование направления подготовки/специальности:**

14.03.02 Ядерные физика и технологии.

**2. Профиль подготовки/специализация:** Физика атомного ядра и частиц.

**3. Квалификация выпускника:** бакалавр

**4. Форма обучения:** очная

**5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:** 0803 кафедра математической физики и информационных технологий.

**6. Составители программы:** Деревягина Елена Ивановна, кандидат физико-математических наук, доцент.

**7. Рекомендована:** Научно-методическим советом физического факультета, протокол №6 от 27.06.2022г.

**8. Учебный год:** 2022/2023

**Семестр(ы):** 2

## 9. Цели и задачи учебной дисциплины:

Целями освоения учебной дисциплины являются:

- овладение начальными знаниями по линейной алгебре, необходимыми для изучения других дисциплин специальности,
- знакомство студентов с основными понятиями и методами линейной алгебры;
- формирование у студентов научного математического мышления, умения применять математический аппарат для исследования физических процессов;
- формирование у обучающихся определенного состава компетенций (результатов освоения) для подготовки к профессиональной деятельности.

Основная задача учебной дисциплины: формирование всесторонних знаний об основах линейной алгебры. В курсе данной дисциплины студенты овладевают знаниями по таким разделам линейной алгебры, как линейные пространства и операторы, алгебра матриц, системы линейных уравнений.

## 10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:

Дисциплина (модуль) «Линейная алгебра» относится к базовой части модуля общепрофессиональных дисциплин учебного плана ООП.

Предшествующие дисциплины:

1. «Аналитическая геометрия» (Б1.О.11.02);

Дисциплины, которым предшествует данная дисциплина:

1. «Векторный и тензорный анализ» (Б1.О.11.04);
2. «Дифференциальные уравнения» (Б1.О.11.05).

## 11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-1	Способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности	ОПК-1.1	Владеет знаниями фундаментальных разделов математики.	Знает математический язык для выражения одной из самых общих естественнонаучных идей - идеи линейности в совокупности целостной системы научных знаний об окружающем мире.
		ОПК-1.2	Создает и применяет математические модели в своей практической деятельности.	Умеет использовать аппарат линейной алгебры при изучении последующих математических, физических курсов и в программировании, для научного познания и творчества; - оценивать численные значения величин, характерных для различных разделов естествознания.

		ОПК-1.3	Умеет оценивать границы применимости используемых математических моделей при решении типовых профессиональных задач.	Использует положения, законы и методы естественных наук для решения инженерных задач в сфере профессиональной деятельности.
--	--	---------	--	---

**12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час. — 4/144.**

**Форма промежуточной аттестации(зачет/экзамен) экзамен.**

**13. Виды учебной работы:**

Вид учебной работы	Трудоемкость	
	Всего	По семестрам
		2 семестр
Аудиторные занятия	64	64
в том числе: лекции	32	32
практические	32	32
Самостоятельная работа	44	44
Форма промежуточной аттестации (зачет – 0 час. / экзамен 0 час.)	36	36
Итого:	144	144

**13.1. Содержание дисциплины:**

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК *
<b>1. Лекции</b>			
1.1	Матричная алгебра. Системы линейных уравнений.	Арифметическое n-мерное пространство. Матрицы. Операции над матрицами. Определители n-го порядка. Системы, решаемые по правилу Крамера. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре. Методы вычисления ранга матрицы. Теорема Кронекера-Капелли. Фундаментальная система решений для однородной системы линейных уравнений. Структура общего решения для неоднородной системы линейных уравнений. Метод Гаусса.	

1.2	Линейные пространства.	Линейные пространства. Линейно зависимые и независимые системы векторов. Базис в линейном пространстве. Матричная форма разложения по базису. Матрица перехода к новому базису. Формулы преобразования координат при изменении базиса. Подпространства линейного пространства, линейные многообразия. Линейная оболочка системы векторов. Сумма и пересечение подпространств. Прямая сумма подпространств. Евклидовы пространства. Неравенство Коши-Буняковского. Ортонормированный базис. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта.	
1.3	Линейные операторы.	Линейные операторы. Матрица линейного оператора. Изменение матрицы линейного оператора при переходе к новому базису. Произведение линейных операторов. Алгебра операторов. Матрица суммы, произведения на число и произведения линейных операторов. Обратный оператор. Ядро и образ линейного оператора. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора. Характеристическое уравнение.	
1.4	Линейные операторы в пространствах со скалярным произведением.	Сопряженный оператор, его свойства. Матрица сопряженного оператора в ортонормированном базисе. Самосопряженные операторы, унитарные операторы. Приведение матрицы самосопряженного оператора к диагональному виду.	
1.5	Билинейные и квадратичные формы.	Линейные формы. Сопряженное пространство. Двойственный базис. Билинейные формы. Вид билинейной формы в фиксированном базисе. Переход к новому базису. невырожденные, симметричные и положительно определенные билинейные формы. Квадратичные формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа и методом собственных векторов.	
<b>2. Практические занятия</b>			
2.1	Матричная алгебра. Решение систем линейных уравнений.	Операции над матрицами. Определители n-го порядка. Обратная матрица. Ранг матрицы. Решение однородных и неоднородных систем по методу Гаусса.	
2.2	Линейные пространства.	Примеры линейных пространств. Базис в линейном пространстве. Матрица перехода. Формулы изменения координат вектора при изменении базиса.	
2.3	Линейные операторы.	Примеры линейных операторов. Матрица линейного оператора в базисе. Изменение матрицы линейного оператора при переходе к новому базису. Нахождение собственных чисел и собственных векторов линейных операторов.	

		Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду.	
2.4	Квадратичные формы.	Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа и методом собственных векторов.	

### 13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий:

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (часов)			
		Лекции	Практическое	Самостоятельная работа	Всего
1	Матричная алгебра. Системы линейных уравнений.	8	12	14	34
2	Линейные пространства.	8	8	10	26
3	Линейные операторы.	8	6	8	22
4	Линейные операторы в пространствах со скалярным произведением.	4	2	4	10
5	Билинейные и квадратичные формы.	4	4	8	
	Итого:	32	32	44	108

### 14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Работа с конспектами лекций, чтение литературы по предмету; решение задач по курсу в течение семестра.

Самостоятельная работа студентов в течение семестра включает следующие формы работы и виды контроля:

- подготовка к практическим занятиям;

при подготовке к практическим занятиям необходимо проработать теоретические вопросы занятия с использованием материала лекций и рекомендуемой литературы, подробно разобрать примеры решения задач, разобранных на лекциях, выполнить домашние задания по данной теме;

- подготовка к коллоквиуму по лекционному курсу;

при подготовке к коллоквиуму по лекционному курсу необходимо проработать теоретические вопросы данного модуля с использованием материала лекций и рекомендуемой литературы, подробно разобрать примеры, разобранные на лекциях, выполнить домашние задания по данному модулю;

Показателем успешной текущей работы студента является еженедельное выполнение заданий на практических занятиях. Методическое обеспечение самостоятельной работы студентов по курсу включает:

- Конспект лекций;
- Основную литературу;
- Дополнительную литературу.

### 15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины (список литературы оформляется в соответствии с требованиями ГОСТ и используется общая сквозная нумерация для всех видов источников)

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре: Учебное пособие. – 14-е изд., стер./ И. В. Проскуряков. – СПб: Лань. 2019. – 476 с.
2	А.Н. Канатников, А.П. Крищенко. Линейная алгебра. – 5-е изд. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015. -336 с.
3	Попов В. С. Линейная алгебра. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. -256 с.
4	Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра и аналитическая геометрия - 6-е изд., сер. Университетский учебник. - М: МГУ, 2014. - 280 с.

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
1	Шмидт Р. А. Алгебра. 4: Задачник-практикум - СПб: Изд. Санкт-Петербургского Гос. Ун-та, 2016. - 184 с.
2	Ильин В. А., Ким Г. Д. Линейная алгебра и аналитическая геометрия - 3-е изд., перераб. и доп. - М: Проспект, 2014. - 400 с.

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)\*:

№ п/п	Ресурс
1.	<a href="http://www.lib.vsu.ru">www.lib.vsu.ru</a> – ЗНБ ВГУ
2.	<a href="http://e.lanbook.com/">http://e.lanbook.com/</a> - ЭБС «Лань»
3.	<a href="http://www.book.ru/">http://www.book.ru/</a> - ЭБС «Book.ru»

\* Вначале указываются ЭБС, с которыми имеются договора у ВГУ, затем открытые электронно-образовательные ресурсы

## 16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы.

Курс дисциплины построен таким образом, чтобы позволить студентам максимально проявить способность к самостоятельной работе. Для успешной самостоятельной работы предполагается тесный контакт с преподавателем.

Изучение дисциплины следует начинать с проработки настоящей рабочей программы, особое внимание уделяя целям и задачам, структуре и содержанию курса.

Студентам рекомендуется получить в библиотеке учебную литературу по дисциплине, необходимую для эффективной работы на всех видах аудиторных занятий, а также для самостоятельной работы по изучению дисциплины.

Своевременное и качественное выполнение самостоятельной работы базируется на соблюдении настоящих рекомендаций и изучении рекомендованной литературы. Студент может дополнить список использованной литературы современными источниками, не представленными в списке рекомендованной литературы, и в дальнейшем использовать собственные подготовленные учебные материалы.

Успешное освоение курса предполагает активное, творческое участие студента путем планомерной, повседневной работы.

### **17. Информационные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая программное обеспечение и информационно-справочные системы (при необходимости)**

### **18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:**

*(при использовании лабораторного оборудования указывать полный перечень, при большом количестве оборудования можно вынести данный раздел в приложение к рабочей программе)*

Лекционная аудитория.

---

### **19. Фонд оценочных средств:**

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Разделы 1-5 Разделы 1-4	ОПК-1	ОПК-1.1	Контрольные работы
			ОПК-1.2	Контрольные работы
			ОПК-1.3	Контрольные работы
Промежуточная аттестация форма контроля — экзамен				Перечень вопросов Практическое задание

### **20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания**

#### **20.1 Текущий контроль успеваемости**

Оценка знаний, умений и навыков, характеризующая этапы формирования компетенций в рамках изучения дисциплины осуществляется в ходе текущей и промежуточной аттестаций.

Текущая аттестация проводится в соответствии с Положением о текущей аттестации обучающихся по программам высшего образования Воронежского государственного университета. Текущая аттестация проводится в форме письменных контрольных работ. Критерии оценивания приведены выше.

Промежуточная аттестация проводится в соответствии с Положением о промежуточной аттестации обучающихся по программам высшего образования.

Контрольно-измерительные материалы промежуточной аттестации включают в себя теоретические вопросы, позволяющие оценить уровень полученных знаний и

практические задания, позволяющие оценить степень сформированности умений и навыков, и опыт деятельности.

## 20.2 Перечень вопросов к экзамену.

1. Арифметическое пространство  $\mathbb{R}^n$ .
2. Матрицы. Операции над матрицами. Ассоциативность умножения матриц. Квадратные матрицы.
3. Определители  $n$ -го порядка. Алгебраические дополнения и миноры. Свойства определителей. Определитель Вандермонда.
4. Обратная матрица. Необходимое и достаточное условие существования, единственность, формула для вычисления обратной матрицы.
5. Различные формы записи систем линейных уравнений. Системы, решаемые по правилу Крамера.
6. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре.
7. Методы вычисления ранга матрицы. Теорема Кронекера-Капелли.
8. Фундаментальная система решений для однородной системы линейных уравнений. Структура общего решения для неоднородной системы линейных уравнений.
9. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.
10. Линейные пространства. Определение, примеры. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис в линейном пространстве.
11. Теоремы о базисе. Размерность пространства. Примеры конечномерных и бесконечномерных пространств.
12. Матричная форма разложения по базису. Матрица перехода к новому базису. Формулы преобразования координат при изменении базиса.
13. Подпространства линейного пространства, линейные многообразия. Примеры. Линейная оболочка системы векторов. Сумма и пересечение подпространств. Прямая сумма подпространств.
14. Евклидовы пространства. Примеры. Неравенство Коши-Буняковского. Норма вектора, угол между векторами, ортогональные векторы.
15. Ортонормированный базис в евклидовом пространстве. Проекция вектора. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта.
16. Линейные операторы. Примеры. Матрица линейного оператора. Изменение матрицы линейного оператора при переходе к новому базису.
17. Ядро и образ линейного оператора. Дефект и ранг линейного оператора.



18. Сумма линейных операторов, произведение линейного оператора на число, произведение линейных операторов. Обратный оператор и условия его существования.
19. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора. Характеристическое уравнение. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду.
20. Сопряженный оператор, его свойства. Самосопряженные операторы. Унитарные операторы. Приведение матрицы самосопряженного оператора к диагональному виду.
21. Билинейные формы. Вид билинейной формы в фиксированном базисе. Переход к новому базису.
22. Квадратичные формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа. Положительно определенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы.

### 20.3 Перечень практических заданий.

1. Решить систему методом Гаусса, указать общее решение и одно частное:

$$\begin{array}{rclclcl}
 2x_1 & +x_2 & -x_3 & -x_4 & +x_5 & = & 1 \\
 x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & -2x_5 & = & 0 \\
 3x_1 & +3x_2 & -3x_3 & -3x_4 & +4x_5 & = & 2 \\
 4x_1 & +5x_2 & -5x_3 & -5x_4 & +7x_5 & = & 3
 \end{array}$$

2. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix}
 1 & -3 & 0 & -2 \\
 -4 & 3 & 3 & -2 \\
 -1 & 1 & -2 & -3 \\
 3 & -2 & 2 & 8
 \end{vmatrix}$$

3. Найти фундаментальную систему решений. Указать общее решение:

$$\begin{array}{rclclcl}
 x_1 & +2x_2 & +4x_3 & -3x_4 & = & 0 \\
 3x_1 & +5x_2 & +6x_3 & -4x_4 & = & 0 \\
 4x_1 & +5x_2 & -2x_3 & +3x_4 & = & 0 \\
 3x_1 & +8x_2 & +24x_3 & -19x_4 & = & 0
 \end{array}$$

4. Найти ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & 8 & -4 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & -1 & 2 & -7 & -5 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Решить матричное уравнение:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Найти значение матричного многочлена

$$f(A) = 2x^5 - x^2 - 3x + 4,$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

7. Найти обратную матрицу

$$\begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Применяя процесс ортогонализации, постройте ортонормированный базис:

$$\bar{e}_1 = (1, 2, 2, -1)^T, \quad \bar{e}_2 = (1, 1, -5, 3)^T, \quad \bar{e}_3 = (3, 2, 8, -7)^T.$$

9. Проверить, образуют ли многочлены

$$f_1 = 1 + t + t^2, \quad f_2 = 1 + t + 2t^2, \quad f_3 = 1 + 2t + 3t^2.$$

базис в пространстве многочленов степени не выше двух. Найти координаты многочлена

$$f = -2 + 2t + 6t^2$$

в этом базисе.

10. Проверить, образуют ли следующие матрицы базис в пространстве квадратных матриц второго порядка:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

11.

Написать матрицу оператора  $A: V^3 \rightarrow V^3$ ,  $A\bar{x} = (\bar{e}, \bar{x})\bar{e}$ , где

$$\bar{e} = \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{k},$$

в базисе  $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ .

12.

Проверить, что оператор  $A: V^3 \rightarrow V^3$ , заданный формулой  $A\bar{x} = [\bar{a}, \bar{x}]$ , является линейным. В случае  $\bar{a} = 3\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$  написать матрицу оператора  $A$  в базисе  $\mathcal{B} = (\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ . (Квадратные скобки означают векторное произведение.)

13.

Найти собственные числа и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

14.

Показать, что каждая из двух систем векторов образует базис в  $R^3$  и найти матрицу перехода:

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 &= (1, 2, -1), & \bar{e}_2 &= (-2, 1, 2), & \bar{e}_3 &= (4, 1, -3); \\ \bar{e}'_1 &= (2, 1, -1), & \bar{e}'_2 &= (0, 2, -3), & \bar{e}'_3 &= (1, 1, -5). \end{aligned}$$

15.

Дана матрица линейного оператора  $A$  в базисе  $\mathcal{B} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти ее матрицу в базисе  $\mathcal{B}'$ :  $\bar{e}'_1 = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2$ ,  $\bar{e}'_2 = \bar{e}_1 - 2\bar{e}_2$ .

При оценивании используются количественные и качественные шкалы оценок.

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Обучающийся в полной мере владеет понятийным аппаратом и теоретическими основами дисциплины, способен иллюстрировать ответ примерами, фактами, данными научных исследований, применять теоретические знания для решения практических задач данной дисциплины.	Повышенный уровень	Отлично
Обучающийся в полной мере владеет понятийным аппаратом и теоретическими основами дисциплины, способен иллюстрировать ответ примерами, фактами, данными научных исследований, применять теоретические знания для решения практических задач данной дисциплины. Допускает ошибки при решении этих задач.	Базовый уровень	Хорошо
Обучающийся частично владеет понятийным аппаратом и теоретическими основами дисциплины, способен иллюстрировать ответ примерами, фактами, данными научных исследований, применять теоретические знания для решения практических задач данной дисциплины. Допускает ошибки при решении этих задач.	Пороговый уровень	Удовлетворительно
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует любым трем(четырем) из перечисленных показателей. Обучающийся демонстрирует отрывочные, фрагментарные знания, допускает грубые ошибки.	–	Неудовлетворительно

## ЛИСТ СОГЛАСОВАНИЙ

### РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Направление/специальность 14.03.02 Ядерные физика и технологии


Дисциплина Б1.О.11.03 Линейная алгебра.

Профиль подготовки Физика атомного ядра и частиц

Форма обучения очная

Учебный год 2022/2023

Ответственный исполнитель

Заведующий кафедрой математической физики и информационных технологий  Переселков С.А. 28.06.2022

Исполнители

Доцент кафедры математической физики и информационных технологий \_\_\_\_\_ Деревягина Е.И. 28.06.2022

СОГЛАСОВАНО

Куратор ООП  
по направлению/специальности \_\_\_\_\_ .\_\_\_. 2022  
*подпись* *расшифровка подписи*

Начальник отдела обслуживания ЗНБ \_\_\_\_\_ .\_\_\_. 2022  
*подпись* *расшифровка подписи*

Программа рекомендована Научно-методическим советом физического факультета, протокол №6 от 27.06.2022г.