

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

**УТВЕРЖДАЮ**

Заведующий кафедрой  
математического моделирования



М.Ш. Бурлуцкая

25.05.2023г.

## **РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

### **Б1.О.23 Численные методы**

- 1. Код и наименование направления подготовки:** 01.03.04 Прикладная математика
- 2. Профиль подготовки:** Применение математических методов к решению инженерных и экономических задач
- 3. Квалификация выпускника:** Бакалавр
- 4. Форма обучения:** Очная
- 5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:**  
Кафедра математического моделирования
- 6. Составитель программы:** Силаева Марина Николаевна, к.ф.-м.н., доцент
- 7. Рекомендована:** Научно-методическим советом математического факультета, протокол № 0500-06 от 25.05.2023
- 8. Учебный год:** 2026/2027                      **Семестры:** 7, 8

### 9. Цели и задачи учебной дисциплины:

Овладение теоретическими основами, формирование практических навыков численного решения стандартных задач и компьютерная реализация алгоритмов для соответствующих математических моделей.

### 10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:

Учебная дисциплина «Численные методы» относится к части, формируемой участниками образовательных отношений Блока 1.

Теоретической и практической основой для освоения учебной дисциплины «Численные методы» являются знания, умения и навыки студентов, приобретенные в результате изучения материала следующих курсов: «Математический анализ», «Функциональный анализ», «Уравнения в частных производных», «Уравнения математической физики», «Обыкновенные дифференциальные уравнения».

### 11. Планируемые результаты обучения по дисциплине (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-1	Способен применять знание фундаментальной математики и естественно-научных дисциплин при решении задач в области естественных наук и инженерной практике	ОПК-1.1	Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук	<b>Знать:</b> базовые знания, полученные в области математических и (или) естественных наук;
		ОПК-1.2	Умеет использовать базовые знания в области математических и (или) естественных наук в профессиональной деятельности	<b>Уметь:</b> использовать базовые знания в области математических и (или) естественных наук в профессиональной деятельности;
		ОПК-1.3	Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний	<b>Владеть:</b> навыками выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.

**12 Объем дисциплины в зачетных единицах/часах — 6 / 216.**

**Форма промежуточной аттестации – зачет; экзамен.**

### 13. Виды учебной работы:

Вид учебной работы	Трудоемкость(часы)		
	Всего	По семестрам	
		7 семестр	8 семестр
Аудиторные занятия	120	68	52
в том числе:			
лекции	60	34	26
практические	0	0	0
лабораторные	60	34	26
Самостоятельная работа	60	22	38
Форма промежуточной аттестации (экзамен – 36 час.)	36	-	36
<b>Итого:</b>	<b>216</b>	<b>90</b>	<b>126</b>

## 13.1. Содержание дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК *
<b>1. Лекции</b>			
1.1	Источники и классификация погрешностей.	1. Математическая обработка экспериментальных данных. 2. Понятие погрешностей.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=5794">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=5794</a>
1.2	Численные методы решения нелинейных уравнений	1. Метод деления отрезка пополам, метод простой итерации и метод Ньютона. 2. Оценка погрешности.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=5794">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=5794</a>
1.3	Интерполяция алгебраическими многочленами	1. Постановка задачи интерполяции. Интерполяционный многочлен Лагранжа. Разделенные разности. Интерполяционные многочлены Ньютона. 2. Многочлены Чебышева. Оптимальный выбор узлов интерполяции. 3. Сходимость интерполяционного процесса. 4. Интерполяция сплайнами. Кубические сплайны. 5. Наилучшее равномерное приближение функции на отрезке. Теоремы Чебышева. Способы построения приближения, близкого к наилучшему.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=5794">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=5794</a>
1.4	Численное интегрирование	1. Квадратурная формула. Общая интерполяционная квадратура и ее погрешность. 2. Квадратурные формулы Ньютона-Котеса. 3. Сходимость квадратурного процесса. 4. Сходимость квадратурного процесса, порожденного квадратурными формулами Гаусса. 5. Способы повышения точности квадратурной формулы. Правила Рунге.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=5794">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=5794</a>
1.5	Численное дифференцирование	1. Некорректность формулы численного дифференцирования. 2. Сходящиеся формулы численного дифференцирования. Способы построения сходящихся формул численного дифференцирования.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=5794">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=5794</a>
1.6	Численные методы линейной алгебры	1. Методы решения линейных систем. Модифицированный метод Гаусса. 2. Метод прогонки решения линейных систем с трех диагональной матрицей. Устойчивость метода. 3. Метод простой итерации. Достаточные условия сходимости и необходимые и достаточные условия сходимости. Метод наискорейшего градиентного спуска. Метод Якоби и Зейделя. 4. Число обусловленности матрицы. Оценка погрешности решения.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=5794">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=5794</a>
1.7	Численные методы решения проблемы собственных значений	1. Проблемы собственных значений. 2. Методы Крылова и Данилевского. 3. Метод вращения для симметричных матриц.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=5794">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=5794</a>
1.8	Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений	1. Метод Тейлора решения задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка. 2. Метод ломаных Эйлера. 3. Методы Рунге-Кутты. Оценка погрешности. 4. Интерполяционный метод Адамса. 5. Экстраполяционный метод Адамса. 6. Устойчивость и сходимость методов полиномиальной аппроксимации.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=5794">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=5794</a>
1.9	Численные методы решения краевых	1. Понятие о конечно-разностных методах решения краевых задач для ОДУ.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=5794">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=5794</a>

	задач для ОДУ	2. Аппроксимация. Устойчивость. Сходимость.	hp?id=5794
1.10	Метод сеток решения краевых задач для уравнений с частными производными	1. Общая схема метода сеток решения краевых задач для дифференциальных уравнений математической физики. 2. Сходимость разностной схемы. 3. Аппроксимация на решении. 4. Устойчивость. Теорема Филиппова. 5. Метод конечных элементов. 6. Разностные схемы для уравнения теплопроводности с одной пространственной переменной; явные и неявные схемы. 7. Разностная схема для уравнений Пуассона в прямоугольнике, ее корректность. 8. Методы решения сеточной задачи Дирихле для уравнений Пуассона.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=5794">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=5794</a>
1.11	Решение уравнения Фредгольма 2-го рода	1. Уравнение Фредгольма 2-го рода. 2. Способы решения.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=5794">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=5794</a>
<b>2. Лабораторные занятия</b>			
2.1	Источники и классификация погрешности	1. Математическая обработка экспериментальных данных. 2. Понятие погрешностей.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=5794">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=5794</a>
2.2	Численные методы решения нелинейных уравнений	1. Метод деления отрезка пополам, метод простой итерации и метод Ньютона. 2. Оценка погрешности.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=5794">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=5794</a>
2.3	Интерполяция алгебраическими многочленами	1. Постановка задачи интерполяции. 2. Интерполяционный многочлен Лагранжа. 3. Конечные разности. 4. Интерполяционные многочлены Ньютона, Стирлинга, Бесселя. 5. Интерполяция сплайнами. Кубические сплайны.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=5794">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=5794</a>
2.4	Численное интегрирование	1. Квадратурная формула. Общее интерполяционная квадратура и ее погрешность. 2. Квадратурные формулы Ньютона-Котеса. 3. Сходимость квадратурного процесса. 4. Сходимость квадратурного процесса, порожденного квадратурными формулами Гаусса. 5. Способы повышения точности квадратурной формулы. Правила Рунге.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=5794">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=5794</a>
2.5	Численное дифференцирование	1. Некорректность формулы численного дифференцирования. 2. Сходящиеся формулы численного дифференцирования. Способы построения сходящихся формул численного дифференцирования.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=5794">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=5794</a>
2.6	Численные методы линейной алгебры	1. Методы решения линейных систем. Модифицированный метод Гаусса. 2. Метод прогонки решения линейных систем с трехдиагональной матрицей. Устойчивость метода. 3. Метод простой итерации. Достаточные условия сходимости и необходимые и достаточные условия сходимости. Метод наискорейшего градиентного спуска. Метод Якоби и Зейделя. 4. Число обусловленности матрицы. Оценка погрешности решения.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=5794">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=5794</a>
2.7	Численные методы решения проблемы собственных значений	1. Проблемы собственных значений. 2. Методы Крылова и Данилевского. 3. Метод вращения для симметричных матриц.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=5794">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=5794</a>
2.8	Численные методы решения задачи Коши для	1. Метод Тейлора решения задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка. 2. Методы Рунге-Кутты. Оценка погрешности.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=5794">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=5794</a>

	обыкновенных дифференциальных уравнений	3. Интерполяционный метод Адамса. 4. Экстраполяционный метод Адамса. 5. Устойчивость и сходимости методов полиномиальной аппроксимации.	
2.9	Численные методы решения краевых задач для ОДУ	1. Понятие о конечно-разностных методах решения краевых задач для ОДУ. 2. Аппроксимация. Устойчивость. Сходимость.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=5794">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=5794</a>
2.10	Метод сеток решения краевых задач для уравнений с частными производными	1. Общая схема метода сеток решения краевых задач для дифференциальных уравнений математической физики. 2. Сходимость разностной схемы. 3. Аппроксимация на решении. 4. Устойчивость. Теорема Филиппова. 5. Метод конечных элементов. 6. Разностные схемы для уравнения теплопроводности с одной пространственной переменной; явные и неявные схемы. 7. Разностная схема для уравнений Пуассона в прямоугольнике, ее корректность. 8. Методы решения сеточной задачи Дирихле для уравнений Пуассона.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=5794">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=5794</a>
2.11	Решение уравнения Фредгольма 2-го рода	1. Уравнение Фредгольма 2-го рода. 2. Способы решения.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=5794">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=5794</a>

### 13.2 Темы (разделы) дисциплины и виды занятий:

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1	Источники и классификация погрешностей	3	0	3	3	9
2	Численные методы решения нелинейных уравнений	6	0	6	6	18
3	Интерполяция алгебраическими многочленами	6	0	6	6	18
4	Численное интегрирование	6	0	6	6	18
5	Численное дифференцирование	3	0	3	3	9
6	Численные методы линейной алгебры	6	0	6	6	18
7	Численные методы решения проблемы собственных значений	6	0	6	6	18
8	Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений	6	0	6	6	18
9	Численные методы решения краевых задач для ОДУ	6	0	6	6	18
10	Метод сеток решения краевых задач для уравнений с частными производными	6	0	6	6	18
11	Решение уравнения Фредгольма 2-го рода	6		6	6	18
	<b>Итого:</b>	<b>60</b>	<b>0</b>	<b>60</b>	<b>60</b>	<b>180</b>

### 14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Освоение дисциплины предполагает не только обязательное посещение обучающимся аудиторных занятий (лабораторных занятий) и активную работу на них, но и самостоятельную учебную деятельность, на которую отводится 60 часов.

Самостоятельная учебная деятельность студентов по дисциплине «Численные методы» предполагает выполнение следующих заданий:

1) самостоятельное изучение учебных материалов по разделам 1-11 с использованием основной и дополнительной литературы, информационно-справочных и поисковых систем;

2) подготовку к текущим аттестациям: выполнение лабораторных заданий, самостоятельное освоение понятийного аппарата по каждой теме.

Особое внимание обучающихся направляется на освоение практических методов численного дифференцирования, интегрирования, решения алгебраических, дифференциальных и интегральных уравнений. Качественное выполнение лабораторных работ подразумевает полноценное изучение и максимальное задействование всех предоставленных обучающимся информационно-коммуникационных ресурсов. Приоритетной является работа с общедоступными современными пакетами программ.

Вопросы лекционных и лабораторных занятий обсуждаются на занятиях в виде устного опроса – индивидуального и фронтального. При подготовке к лекционным и лабораторным занятиям обучающимся важно помнить, что их задача, отвечая на основные вопросы плана занятия и дополнительные вопросы преподавателя, показать свои знания и кругозор, умение логически построить ответ, владение математическим аппаратом и иные коммуникативные навыки, умение отстаивать свою профессиональную позицию. В ходе устного опроса выявляются детали, которые по каким-то причинам оказались недостаточно осмысленными студентами в ходе учебных занятий. Тем самым опрос выполняет важнейшие обучающую, развивающую и корректирующую функции, позволяет студентам учесть недоработки и избежать их при подготовке к промежуточным аттестациям (7 семестр – зачет, 8 семестр – экзамен)

Все выполняемые студентами самостоятельно задания (выполнение контрольных и лабораторных работ) подлежат последующей проверке преподавателем. Результаты текущих аттестаций учитываются преподавателем при проведении промежуточной аттестации (7 семестр – зачет, 8 семестр – экзамен).

В случае необходимости перехода на дистанционный режим обучения используется электронный курс «Численные методы» ([URL:https://edu.vsu.ru/enrol/index.php?id=5794](https://edu.vsu.ru/enrol/index.php?id=5794)) на портале «Электронный университет ВГУ».

## **15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины**

### **а) основная литература:**

№ п/п	Источник
1	Бахвалов Н.С. Численные методы: учеб. пособие / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков; МГУ им. М.В. Ломоносова – 6-е изд. – М.: Бином, Лаборатория знаний 2008. – 637 с. (все предыдущие издания).
2	Демидович Б.П. Основы вычислительной математики: учеб. пособие/ Б.П. Демидович, И.А. Морон, – 6-е изд. – СПб.: Лань, 2007. – 664 с (все предыдущие издания).

### **б) дополнительная литература:**

№ п/п	Источник
3	Бахвалов Н.С. Численные методы в задачах и упражнениях: учеб. пособие / Н.С. Бахвалов, А.В. Лапин, Е.В. Чижонков; под ред. В.А. Садовничева. – М.: Высшая школа, 2000. – 190 с.

**в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)\*:**

№ п/п	Ресурс
4	Арушанян О.Б. Численные решения интегральных уравнений методом квадратур / О.Б. Арушанян. – НИИВЦ МГУ- Интернет ресурс: <a href="http://num-anal.srcc/msu.ru/meth_mat/prac_qdf/page_24/htm">http://num-anal.srcc/msu.ru/meth_mat/prac_qdf/page_24/htm</a> .
5	Арушанян О.Б. Решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений/ О.Б. Арушанян, С.Ф. Запеткин. – НИИВЦ МГУ- Интернет ресурс: <a href="http://num-anal.srcc/msu.ru/meth_mat/prac_qdf/page_27/htm">http://num-anal.srcc/msu.ru/meth_mat/prac_qdf/page_27/htm</a> .
6	Приклонский В.И. Численные методы / В.И. Приклонский. – МГУ Физфак. – Интернет ресурс: <a href="http://num-anal.srcc/msu.ru/meth_mat/prac_qdf/page_23/htm">http://num-anal.srcc/msu.ru/meth_mat/prac_qdf/page_23/htm</a> .
7	Тыртышников Е.Е. Методы численного анализа / Е.Е. Тыртышников. – ИБМ РА. – Интернет ресурс: <a href="http://window.edu.ru/window/library?p_rid=39142">http://window.edu.ru/window/library?p_rid=39142</a> .
8	ЭБС «Университетская библиотека онлайн»: образовательный ресурс: <URL: <a href="http://www.biblioclub.ru">http://www.biblioclub.ru</a> > .
9	Научная Зональная библиотека Воронежского государственного университета : Электронный каталог : <a href="https://www.lib.vsu.ru/">https://www.lib.vsu.ru/</a> .

**16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы** (учебно-методические рекомендации, пособия, задачки, методические указания по выполнению практических (контрольных), курсовых работ и др.)

№ п/п	Источник
1	Арушанян О.Б. Решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений / О.Б. Арушанян, С.Ф. Запеткин. – НИИВЦ МГУ- Интернет ресурс: <a href="http://num-anal.srcc/msu.ru/meth_mat/prac_qdf/page_27/htm">http://num-anal.srcc/msu.ru/meth_mat/prac_qdf/page_27/htm</a> .
2	Арушанян О.Б. Численные решения интегральных уравнений методом квадратур / О.Б. Арушанян. – НИИВЦ МГУ- Интернет ресурс: <a href="http://num-anal.srcc/msu.ru/meth_mat/prac_qdf/page_24/htm">http://num-anal.srcc/msu.ru/meth_mat/prac_qdf/page_24/htm</a> .
3	Бахвалов Н.С. Численные методы в задачах и упражнениях: учеб. пособие / Н.С. Бахвалов, А.В. Лапин, Е.В. Чижонков; под ред. В.А. Садовничева. – М.: Высшая школа, 2000. – 190 с.
4	Бахвалов Н.С. Численные методы: учеб. пособие / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков; МГУ им. М.В. Ломоносова – 6-е изд. – М.: Бином, Лаборатория знаний 2008. – 637 с. (все предыдущие издания).
5	Демидович Б.П. Основы вычислительной математики: учеб. пособие/ Б.П. Демидович, И.А. Морон, – 6-е изд.- СПб.: Лань, 2007. – 664 с (все предыдущие издания).
6	Приклонский В.И. Численные методы / В.И. Приклонский. – МГУ Физфак. – Интернет ресурс: <a href="http://num-anal.srcc/msu.ru/meth_mat/prac_qdf/page_23/htm">http://num-anal.srcc/msu.ru/meth_mat/prac_qdf/page_23/htm</a> .
7	Тыртышников Е.Е. Методы численного анализа / Е.Е. Тыртышников. – ИБМ РА. – Интернет ресурс: <a href="http://window.edu.ru/window/library?p_rid=39142">http://window.edu.ru/window/library?p_rid=39142</a> .

**17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ), электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):**

При реализации дисциплины используются следующие образовательные технологии: логическое построение дисциплины, установление межпредметных связей, обозначение теоретического и практического компонентов в учебном материале, актуализация личного и учебно-профессионального опыта обучающихся, включение элементов дистанционных образовательных технологий.

В практической части курса используется стандартное современное программное обеспечение персонального компьютера.

В части освоения материала лекционных и лабораторных занятий, самостоятельной работы по отдельным разделам дисциплины, прохождения текущей и промежуточной аттестации может применяться электронное обучение и дистанционные образовательные технологии, в частности, электронный курс «Численные методы» (URL:<https://edu.vsu.ru/enrol/index.php?id=5794>) на портале «Электронный университет ВГУ».

### 18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Учебная аудитория для проведения занятий лекционного и семинарского типа, текущего контроля и промежуточной аттестации; специализированная мебель.

Компьютерный класс: специализированная мебель, маркерная доска, персональные компьютеры.

Перечень необходимого программного обеспечения: Ubuntu (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://ubuntu.com/download/desktop> ); VisualStudioCommunity (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия <https://visualstudio.microsoft.com/ru/vs/community/> ); MATLABClassroom (сублицензионный контракт 3010-07/01-19 от 09.01.19); LibreOffice (GNU Lesser General Public License (LGPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://ru.libreoffice.org/about-us/license/> ); Lazarus (GNU Lesser General Public License (LGPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://www.lazarus-ide.org/index.php>); FreePascal (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://www.freepascal.org/faq.html> ); Maxima (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия <http://maxima.sourceforge.net/faq.html> ).

В самостоятельной работе обучающиеся используют ресурсы Зональной научной библиотеки ВГУ (электронный каталог: <http://www.lib.vsu.ru>).

### 19. Фонд оценочных средств:

#### 19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1	1.1 Источники и классификация погрешности. 1.2 Численные методы решения нелинейных уравнений	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3	Комплект лабораторных заданий № 1, 2
2	1.3 Интерполяция алгебраическими многочленами. 1.4 Численное интегрирование.	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3	Комплект лабораторных заданий № 3, 4
3	1.5 Численное дифференцирование. 1.6 Численные методы линейной алгебры.	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3	Комплект лабораторных заданий № 5, 6
4	1.7 Численные методы решения проблемы собственных значений. 1.8 Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2	Комплект лабораторных заданий № 7, 8
5	1.9 Численные методы решения краевых задач для ОДУ. 1.10 Метод сеток решения краевых задач для уравнений с частными производными.	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3	Комплект лабораторных заданий №9
6	1.11 Решение уравнения Фредгольма 2-го рода	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2	Комплект лабораторных заданий № 10



№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
Промежуточная аттестация форма контроля – зачет; экзамен				Перечень вопросов к зачету; экзамену

## 20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

### 20.1 Текущий контроль успеваемости

Текущая аттестация проводится в соответствии с Положением о текущей аттестации обучающихся по программам высшего образования Воронежского государственного университета.

Текущая аттестация проводится в форме контрольных работ и лабораторных работ, содержание которых приведено ниже. В ходе контрольной работы обучающемуся выдается КИМ с практическим перечнем заданий и предлагается решить данные задания. В ходе выполнения заданий нельзя пользоваться средствами связи (включая сеть Интернет) и любыми печатными материалами, ограничение по времени — 90 астрономических минут.

При текущем контроле уровень освоения учебной дисциплины и степень сформированности компетенции определяются оценками «зачтено», «не зачтено». Критерии оценивания результатов обучения при текущей аттестации.

#### Контрольная работа №1

1. Вычислить интеграл  $\int_a^b f(x)dx$ ,  $f(x) = \frac{\sin 0.1x}{x}$   $a = 0$ ,  $b = \pi/2$  с точностью  $\varepsilon = 10^{-5}$ , используя правило Симпсона.

2. Найти наименьший положительный корень уравнения  $x^2 + \ln x - 4 = 0$  с точностью  $\varepsilon = 10^{-5}$  методом простых итераций.

#### Контрольная работа №2

1. Численные методы решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода.

2. Найти собственные значения матрицы методом Крылова:

4,4578 1,2158 0,0322 2,3620  
 1,2158 0,3602 3,5666 7,7822  
 0,0322 3,5666 5,6965 1,5555  
 2,3620 7,7822 1,5555 9,3232

#### Лабораторная работа №1

Вычислить значение функции  $\sin(x)$  по формуле Тейлора с точностью  $\varepsilon = 10^{-3}$ ,  $\varepsilon = 10^{-5}$ .

#### Лабораторная работа №2

Найдите наименьший положительный корень уравнения  $f(x) = 0$  с точностью  $\varepsilon = 10^{-5}$  методами деления пополам, простых итераций и Ньютона.

### Лабораторная работа №3

С помощью интерполяционных многочленов Ньютона, Стирлинга и Бесселя найдите значение функции  $f(x)$ , заданной табл. 1, в точках  $x_1, x_2, x_3$  (табл. 2). С помощью сплайн-интерполяции найдите значение данной функции в точке  $x_3$ .

### Лабораторная работа №4

**Задание.** Вычислить интеграл  $\int_a^b f(x)dx$  с точностью  $\varepsilon = 10^{-5}$ , используя правило

Симпсона и составную квадратурную формулу Гаусса с пятью узлами. Оценить погрешность используемых квадратурных формул и определить число частичных отрезков разбиения, необходимое для достижения заданной точности вычисления интеграла.

### Лабораторная работа №5

Для заданных  $k$  и  $p$  методом неопределенных коэффициентов построить формулу численного дифференцирования, аппроксимирующую  $f^{(k)}(x)$  с порядком  $h^p$ .

### Лабораторная работа №6

Найдите решение системы линейных уравнений с точностью  $\varepsilon = 10^{-6}$  методами Гаусса, простой итерации и Зейделя.

### Лабораторная работа №7

Найти все собственные значения предложенной матрицы размером  $4 \times 4$  методами вращения, Данилевского, Крылова.

### Лабораторная работа №8

Найдите на отрезке  $[0,1]$  решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1(x), y_2(x)),$$

$$\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1(x), y_2(x)), \quad y_1(0) = y_{10}, \quad y_2(0) = y_{20}$$

с точностью  $\varepsilon = 10^{-4}$ , методами Рунге-Кутты, Адамса-Башфорта четвертого порядка и прогноза-коррекции (используя для прогноза алгоритм (37) и коррекции – метод Адамса-Мултона четвертого порядка).

### Лабораторная работа №9

1. Решить смешанную задачу для уравнения теплопроводности  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  с начальным условием  $u(x,0)=f(x)$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq t \leq 0,1$ .
2. Найти решение задачи Дирихле в квадрате со стороной 1 для уравнения Лапласа с краевыми условиями вида  $u(0,y)=f_1(y)$ ,  $u(1,y)=f_2(y)$ ,  $u(x,0)=f_3(x)$ ,  $u(x,1)=f_4(x)$ , ( $0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1$ ).

### Лабораторная работа №10

Решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода методом механических квадратур, для заданного количества узлов.

Для оценивания результатов каждой лабораторной и контрольной работы используется **шкала**: «зачтено», «не зачтено».

Соотношение показателей, критериев и шкалы оценивания результатов обучения показаны в следующей таблице:

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
При выполнении лабораторной или контрольной работы студент продемонстрировал в достаточной мере: знание основ составления компьютерных программ для решения типовых математических задач, имеющихся ресурсов для решения прикладных математических задач, умение использовать стандартные пакеты программного обеспечения для решения типовых математических задач, владение навыками хранения, поиска, сбора, систематизации, обработки и использования информации.	Достаточный уровень	Зачтено
При выполнении лабораторной или контрольной работы студент не продемонстрировал в достаточной мере: знание основ составления компьютерных программ для решения типовых математических задач, имеющихся ресурсов для решения прикладных математических задач, умение использовать стандартные пакеты программного обеспечения для решения типовых математических задач, владение навыками хранения, поиска, сбора, систематизации, обработки и использования информации.	–	Не зачтено

### 20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация в 7 семестре по дисциплине заключается в защите лабораторных работ 1-5 и собеседовании по теоретическим вопросам.

#### Перечень вопросов к зачету:

№№ п/п	Темы к промежуточной аттестации (зачету)
1.	Источники и классификация вычислительных погрешностей. Погрешность функции. Особенности машинной арифметики. Влияние ошибок округления на вычислительный процесс.
2.	Численные методы решения скалярных уравнений. Классификация, область применения, алгоритмы и препятствия реализации методов. Методы деления пополам, простой итерации и Ньютона. Сходимость и оценки погрешности методов. Особенности численной и программной реализации методов.
3.	Постановка задачи интерполяции. Построение интерполяционного многочлена.

	Интерполяционный многочлен Лагранжа. Погрешность интерполяции.
4.	Конечные разности и их свойства. Таблица разностей. Интерполяционные формулы Ньютона, Бесселя и Стирлинга.
5.	Интерполяция сплайнами. Конструирование интерполяционного сплайна. Оптимальный способ построения кубического сплайна.
6.	Метод прогонки решения линейных систем с трехдиагональной матрицей. Прямая и обратная прогонки. Устойчивость метода.
7.	Численное интерполирование. Квадратурная формула. Общая интерполяционная квадратура и ее погрешность.
8.	Квадратурные формулы Ньютона-Котеса, погрешность и частные случаи.
9.	Локально-интерполяционные квадратурные формулы и их погрешность.
10.	Сходимость квадратурного процесса. Теорема о необходимых и достаточных условиях сходимости квадратурного процесса.
11.	Квадратурные формулы наивысшего алгебраического порядка точности. Теорема о выборе узлов. Многочлены Лежандра и их свойства. Квадратурная формула Гаусса. Сходимость квадратурного процесса, порожденного квадратурными формулами Гаусса.
12.	Построение сходящихся квадратурных процессов. Способы повышения точности квадратурной формулы. Правило Рунге. Особенности численной и программной реализации квадратурного процесса.
13.	Численное дифференцирование. Способы построения сходящихся формул численного дифференцирования.

Для оценивания результатов обучения на зачете используются следующие **показатели**:

- 1) знание теоретических основ;
- 2) умение решать задачи лабораторной работы;
- 3) умение работать с алгоритмами методов и информационными ресурсами;
- 4) знание основ составления компьютерных программ для решения типовых математических задач численных методов;
- 5) успешное прохождение текущей аттестации.

Для оценивания результатов зачета используется **шкала**: «зачтено», «не зачтено».

Соотношение показателей, критериев и шкалы оценивания результатов обучения показаны в следующей таблице:

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Полное соответствие ответа обучающегося всем перечисленным показателям по каждому из вопросов контрольно-измерительного материала. Умение применять на практике методы и средства для решения типовых задач, эффективного использования ресурсов современных глобальных сетей в исследованиях.	Повышенный уровень	<b>Зачтено</b>
Несоответствие ответа обучающегося одному из перечисленных показателей (к одному из вопросов контрольно-измерительного материала) и правильный ответ на дополнительный вопрос в пределах программы.	Базовый уровень	<b>Зачтено</b>
Несоответствие ответа обучающегося любым двум из перечисленных показателей и неправильный ответ на дополнительный вопрос в пределах программы.	Пороговый уровень	<b>Зачтено</b>
Несоответствие ответа обучающегося любым из перечисленных показателей (в различных комбинациях по отношению к вопросам контрольно-измерительного материала).	—	<b>Не зачтено</b>

В ответе на основные вопросы содержатся отрывочные знания основ, способствующих решению задач профессиональной деятельности, допускаются грубые ошибки при демонстрации умений применять на практике методы для решения типовых задач.		
--	--	--

Промежуточная аттестация в 8 семестре осуществляется в форме собеседования по экзаменационным билетам с помощью ниже приведенных оценочных средств (перечень вопросов к экзамену). В билет включаются два теоретических вопроса.

### Перечень вопросов к экзамену:

№№ п/п	Темы к текущей аттестации (экзамену)
1.	Понятие погрешностей.
2.	Численные методы решения скалярных уравнений.
3.	Интерполяция алгебраическими многочленами. Сплайн-интерполяция.
4.	Численное интегрирование.
5.	Численное дифференцирование.
6.	Численные методы решения линейных алгебраических уравнений.
7.	Численные методы решения проблемы собственных значений.
8.	Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.
9.	Численные методы решения уравнений с частными производными.
10.	Численные методы решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода.
11.	Источники и классификация вычислительных погрешностей. Погрешность функции. Особенности машинной арифметики. Влияние ошибок округления на вычислительный процесс.
12.	Численные методы решения скалярных уравнений. Классификация, область применения, алгоритмы и препятствия реализации методов. Методы деления пополам, простой итерации и Ньютона. Сходимость и оценки погрешности методов. Особенности численной и программной реализации методов.
13.	Постановка задачи интерполяции. Построение интерполяционного многочлена. Интерполяционный многочлен Лагранжа. Погрешность интерполяции.
14.	Многочлены Чебышева и их свойства. Оптимальный выбор узлов интерполяции.
15.	Сходимость интерполяционного процесса. Локальная интерполяция. Построение сходящегося интерполяционного процесса.
16.	Конечные разности и их свойства. Таблица разностей. Интерполяционные формулы Ньютона, Бесселя и Стирлинга.
17.	Разделенные разности и их свойства. Интерполяционная формула Ньютона для неравноотстоящих узлов.
18.	Интерполяция сплайнами. Конструирование интерполяционного сплайна. Оптимальный способ построения кубического сплайна.
19.	Метод прогонки решения линейных систем с трехдиагональной матрицей. Прямая и обратная прогонки. Устойчивость метода.
20.	Наилучшее равномерное приближение функции на отрезке. Теоремы Чебышева. Способы построения приближения, близкого к наилучшему.
21.	Численное интерполирование. Квадратурная формула. Общая интерполяционная квадратура и ее погрешность.
22.	Квадратурные формулы Ньютона-Котеса, погрешность и частные случаи.
23.	Локально-интерполяционные квадратурные формулы и их погрешность.
24.	Сходимость квадратурного процесса. Теорема о необходимых и достаточных условиях сходимости квадратурного процесса.
25.	Квадратурные формулы наивысшего алгебраического порядка точности. Теорема о выборе узлов. Многочлены Лежандра и их свойства. Квадратурная формула Гаусса. Сходимость квадратурного процесса, порожденного квадратурными формулами Гаусса.
26.	Построение сходящихся квадратурных процессов. Способы повышения точности квадратурной формулы. Правило Рунге. Особенности численной и программной реализации квадратурного процесса.

27.	Численное дифференцирование. Способы построения сходящихся формул численного дифференцирования.
28.	Численные методы решения линейных систем. Классическая схема метода Гаусса. Схема с выбором главного элемента. Модификация метода Гаусса. Программная реализация метода Гаусса с выбором главного элемента.
29.	Метод простой итерации решения линейных систем, сходимости метода, оценки погрешности. Методы Якоби и Зейделя.
30.	Влияние ошибки округления на вычислительный процесс при решении линейных систем. Число обусловленности матрицы. Оценка погрешности решения.
31.	Методы Крылова и Данилевского отыскания собственных значений и векторов. Способы раскрытия характеристического многочлена.
32.	Методы Тейлора и Рунге-Кутты решения задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка.
33.	Устойчивость и сходимости методов полиномиальной аппроксимации. Устойчивость метода Адамса.
34.	Численные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод сеток. Метод стрельбы.
35.	Общая схема методов решения краевых задач для дифференциальных уравнений математической физики. Разностные схемы. Сходимость разностной схемы. Аппроксимация решения. Устойчивость. Теорема Филиппова.
36.	Простейшие разностные схемы для уравнения теплопроводности. Аппроксимация явной и неявной схем. Принцип максимума. Устойчивость явной и неявной схем.
37.	Простейшая разностная схема задачи Дирихле для уравнения Пуассона.
38.	Численная реализация простейшей разностной схемы решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа.
39.	Метод механических квадратур решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода.

Для оценивания результатов обучения на экзамене используются следующие **показатели**:

- 1) знание теоретических основ;
- 2) умение решать задачи;
- 3) умение работать с алгоритмами методов и информационными ресурсами;
- 4) успешное прохождение текущей аттестации.

Для оценивания результатов экзамена используется **шкала**: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Соотношение показателей, критериев и шкалы оценивания результатов обучения показаны в следующей таблице:

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
<p>Полное соответствие обучающимся всем перечисленным показателям по каждому из вопросов контрольно-измерительного материала.</p> <p>Обучающийся в полной мере владеет понятийным аппаратом данной области науки (теоретическими основами дисциплины), способен иллюстрировать ответ примерами, применять теоретические знания для решения практических задач в области курса, студент умеет работать с различными источниками научной информации, грамотно и правильно представляет свои результаты, правильно отвечает на вопросы КИМ.</p>	Повышенный уровень	<b>Отлично</b>

Несоответствие ответа обучающегося одному из перечисленных выше показателей (к одному из вопросов контрольно-измерительного материала) и правильный ответ на дополнительный вопрос в пределах программы. ИЛИ Несоответствие ответа обучающегося любым двум из перечисленных показателей (либо двум к одному вопросу, либо по одному к каждому вопросу контрольно-измерительного материала) и правильные ответы на два дополнительных вопроса в пределах программы.	Базовый уровень	<b>Хорошо</b>
Несоответствие ответа обучающегося любым двум из перечисленных показателей и неправильный ответ на дополнительный вопрос в пределах программы. ИЛИ Несоответствие ответа обучающегося любым трем из перечисленных показателей (в различных комбинациях по отношению к вопросам контрольно-измерительного материала).	Пороговый уровень	<b>Удовлетворительно</b>
Несоответствие ответа обучающегося любым из перечисленных показателей (в различных комбинациях по отношению к вопросам контрольно-измерительного материала).	–	<b>Неудовлетворительно</b>

### 20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ

#### 1) закрытые задания (тестовые, средний уровень сложности):

1. Погрешность при вычислении интерполяционного многочлена в точке  $x$  зависит от расположения этой точки.

Установите соответствие между расположением точки и методом интерполяции, при которых погрешность будет наименьшей.

1.  $x$  рядом с началом отрезка интерполяции
2.  $x$  рядом с концом отрезка интерполяции
3.  $x$  в середине отрезка интерполяции и  $|q| < 0,25$ , где  $q = \frac{(x-x_0)}{h}$ ,  $h$  – шаг
4.  $x$  в середине отрезка интерполяции и  $0,25 \leq q \leq 0,75$ , где  $q = \frac{(x-x_0)}{h}$ ,  $h$  – шаг

- a) первая интерполяционная формула Ньютона
- b) вторая интерполяционная формула Ньютона
- c) интерполяционная формула Гаусса
- d) интерполяционная формула Стирлинга
- e) интерполяционная формула Бесселя
- f) интерполяционная формула Лагранжа

Решение:

В зависимости от расположения точки выбираются следующие методы интерполяции:

- 1) первая интерполяционная формула Ньютона –  $x$  рядом с началом отрезка интерполяции;
- 2) вторая интерполяционная формула Ньютона –  $x$  рядом с концом отрезка интерполяции;
- 3) интерполяционная формула Стирлинга –  $x$  в середине отрезка интерполяции и  $|q| < 0,25$ , где  $q = \frac{(x-x_0)}{h}$ ,  $h$  – шаг;

4) интерполяционная формула Бесселя –  $x$  в середине отрезка интерполяции и  $0,25 \leq q \leq 0,75$ , где  $q = \frac{(x-x_0)}{h}$ ,  $h$  – шаг.

2. При вычислении решения СЛАУ методом Гаусса с выбором ведущего элемента используются следующие стратегии выбора ведущего элемента ...

1. по столбцу (прав)
2. по строке (прав)
3. по всей матрице (прав)
4. по побочной диагонали
5. по главной диагонали

Решение:

Существуют три наиболее распространенные стратегии выбора ведущих элементов:

- 1) в качестве ведущего элемента  $i$ -го шага выбирается максимальный по модулю элемент матрицы при условиях  $j = k \leq i$ ; если имеется несколько максимальных по модулю элементов, то ведущим выбирается любой из них; эта стратегия называется выбором ведущего элемента по столбцу;
- 2) в качестве ведущего элемента  $k$ -го шага выбирается максимальный по модулю элемент матрицы при условиях  $i = k \leq j$ ; если имеется несколько максимальных по модулю элементов, то ведущим выбирается любой из них; эта стратегия называется выбором ведущего элемента по строке;
- 3) в качестве ведущего элемента  $i$ -го шага выбирается максимальный по модулю элемент матрицы при условиях  $k \leq i$ ,  $k \leq j$ ; если имеется несколько максимальных по модулю элементов, то ведущим выбирается любой из них; эта стратегия называется выбором ведущего элемента по всей матрице.

3. Как иначе называют метод Ньютона решения скалярных уравнений

- 1) Метод касательных(прав)
- 2) Метод хорд
- 3) Метод прогонки
- 4) Метод итераций

4. Для применения метода Зейделя решения СЛАУ необходимо, чтобы

- 1) матрица имела преобладающую главную диагональ(прав)
- 2) все собственные значения матрицы были меньше единицы (прав)
- 3) матрица была симметричной

Решение:

Для применения метода Зейделя необходимо, чтобы матрица имела преобладающую главную диагональ, и все собственные значения матрицы были меньше единицы. Условие симметричности матрицы не является необходимым.

5. Первым этапом решения скалярных уравнений является:

1. отделение корней (прав)
2. нахождение корня уравнения
3. определение погрешности вычислений
4. определение скорости сходимости метода



2) открытые задания (тестовые, повышенный уровень сложности):

1. Приближенным числом  $a$  называют число, незначительно отличающиеся от.....

Ответ:  
точного

2. Сумма коэффициентов интерполяционной квадратурной формулы на отрезке  $[-1,1]$  равна.....

Ответ: 2

Решение:

$$\sum_{i=0}^n A_i = \int_a^b dx = b - a = 1 - (-1) = 2.$$

3. Сходимость метода простой итерации решения скалярных уравнений имеет скорость ...

Решение: метод простой итерации решения скалярных уравнений имеет скорость геометрической прогрессии.

Ответ: геометрической прогрессии.

4. Дополните конечную разность первого порядка для функции заданной таблично 2, -6, ...

x	1	2	3	4
y	5	7	1	4

Ответ: 3

Решение:

Конечная разность первого порядка вычисляется вычитанием из последующего значения функции предыдущего.

$$7-5=2$$

$$1-7=-6$$

$$4-1=3.$$

5.

Интеграл от функции  $\sin(x)$  на отрезке  $[0, \pi]$  по формуле трапеций равен

Решение:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] , f(\pi) + f(0) = \sin(\pi) + \sin(0) = 0 + 0 = 0$$

Ответ:

0

**Критерии и шкалы оценивания заданий ФОС:**

1) Задания закрытого типа (выбор одного варианта ответа, верно/неверно):

- 1 балл – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

2) Задания закрытого типа (множественный выбор):

- 2 балла – указаны все верные ответы;
- 0 баллов – указан хотя бы один неверный ответ.

3) Задания закрытого типа (на соответствие):

- 2 балла – все соответствия определены верно;
- 0 баллов – хотя бы одно сопоставление определено неверно.

4) Задания открытого типа (короткий текст):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

5) Задания открытого типа (число):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

**Задания раздела 20.3 рекомендуются к использованию при проведении диагностических работ с целью оценки остаточных результатов освоения данной дисциплины (знаний, умений, навыков).**