

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой
функционального анализа
и операторных уравнений

Каменский М.И.
подпись, расшифровка подписи
25.05.2023 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.О.15 Функциональный анализ

- 1. Код и наименование специальности:** 01.05.01 Фундаментальная математика и механика
- 2. Специализация:** Современные методы теории функций в математике и механике
- 3. Квалификация выпускника:** Математик. Механик. Преподаватель
- 4. Форма обучения:** очная
- 5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:** функционального анализа и операторных уравнений
- 6. Составители программы:** Каменский Михаил Игоревич, д.ф.-м.н., профессор; Бондарев Андрей Сергеевич, к.ф.-м.н., преподаватель; математический факультет, кафедра функционального анализа и операторных уравнений
- 7. Рекомендована:** научно-методическим советом математического факультета, протокол от 25.05.2023, № 0500-06
- 8. Учебный год:** 2024-2025, 2025-2026 **Семестр(ы):** 4-6

9. Цели и задачи учебной дисциплины:

Цели освоения учебной дисциплины:

- доведение до студентов идей и методов функционального анализа, который является языком современной математики, где широко используются понятия функционального пространства (бесконечномерного) и отображения таких пространств.

Задачи учебной дисциплины:

- развитие у студентов двойного зрения: с одной стороны умения следить за внутренней логикой развития теорий функционального анализа, а с другой не упускать из вида обслуживаемую этими теориями проблематику классического и даже прикладного анализа, в частности, вопросов, связанных с интегральными уравнениями Фредгольма и Вольтерры.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:

Дисциплина входит в обязательную часть блока Б1. Дисциплины (модули) учебного плана по специальности 01.05.01 Фундаментальные математика и механика.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-1	Способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики и механики	ОПК-1.1	Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук	Знать: - актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики и механики. Уметь: - использовать базовые знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, в профессиональной деятельности. Владеть: - навыками выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.
		ОПК 1.2	Умеет использовать базовые знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, в профессиональной деятельности	
		ОПК-1.3	Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний	

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час. — 8/288.

Форма промежуточной аттестации – зачет (4 семестр), экзамен (6 семестр)

13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы	Трудоемкость						
	Всего	По семестрам					
		4 семестр		5 семестр		6 семестр	
		ч.	ч., в форме ПП	ч.	ч., в форме ПП	ч.	ч., в форме ПП
Аудиторные занятия	134	68	16		50		
в том числе:	34	0	0		34		
лекции							
практические	100	68	16		16		
лабораторные	0	0	0		0		
Самостоятельная работа	118	40	20		58		
Форма промежуточной аттестации (экзамен – __ час.)	36	зачёт – 0 час.			Экзамен – 36 час.		
Итого:	288	108	36		144		

13.1. Содержание дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины
1. Лекции		
1.1	Линейные ограниченные операторы	Линейные операторы и функционалы (определения). Теорема о линейном операторе, непрерывном в одной точке. Ограниченный линейный оператор и теорема о связи ограниченности линейного оператора с его непрерывностью. Теорема об ограниченности линейного оператора, определенного на конечномерном пространстве.
		Норма линейного ограниченного оператора (определение). Теорема о вычислении нормы оператора. Оператор Фредгольма в пространстве $C[a, b]$ и его норма. Оператор дифференцирования в $C[a, b]$ и из $C^1[a, b]$ в $C[a, b]$.
		Пространство линейных ограниченных операторов. Теорема о полноте пространства линейных ограниченных операторов (в смысле равномерной сходимости). Следствие для сопряженного пространства. Произведение линейных операторов.
		Сильная сходимость линейных операторов, связь с равномерной сходимостью. Принцип равномерной ограниченности (лемма и теорема). Теорема о полноте пространства линейных ограниченных операторов (в смысле сильной сходимости).
		Теорема о продолжении линейного оператора по непрерывности на все пространство. Обратимый и обратный операторы (определения). Теорема о линейности обратного оператора.
1.2	Обратимые операторы	Условие обратимости линейного оператора. Условие обратимости линейного оператора и ограниченности обратного. Лемма об обратимости линейного оператора и обратном операторе. Непрерывно обратимый оператор (определение). Следствие о непрерывно обратимом операторе.
		Теорема Банаха о непрерывной обратимости оператора (две леммы и теорема).
		Резольвента линейного оператора и его спектр (определения). Теорема о регулярном множестве и представлении резольвенты, следствие для спектра. Теорема об открытости регулярного множества, следствие для спектра
1.3	Замкнутые операторы	. Замкнутые операторы (определение). Теорема о замкнутости ограниченного оператора. Замкнутость оператора дифференцирования в $C[a, b]$.

		Теорема о замкнутости оператора, обратного к замкнутому, следствие для непрерывно обратимого оператора. Декартово произведение линейных нормированных пространств (линейные операции, норма и полнота). График линейного оператора. Лемма о графике замкнутого оператора. Теорема о замкнутом операторе, определенном на всем пространстве.
1.4	Линейные ограниченные функционалы	Продолжение линейного ограниченного функционала – лемма и теорема Хана - Банаха (доказательство для сепарабельного вещественного пространства). Три следствия. Лемма о биортогональных системах. Общий вид линейных ограниченных функционалов в пространствах: конечномерном, $l_p (1 < p < \infty)$, гильбертовом, $L_p[a, b] (1 < p < \infty)$ (случай $p \neq 2$ без доказательства). Второе сопряженное пространство и рефлексивные пространства. Слабая сходимость элементов в нормированных пространствах (определение). Простейшие свойства: единственность слабого предела, связь со сходимостью по норме, ограниченность слабо сходящейся последовательности, оценка для нормы слабого предела.
1.5	Слабая сходимость элементов	Слабо полные пространства и теорема о слабой полноте рефлексивных пространств. Теорема о слабой сходимости в конечномерном пространстве. Слабо относительно компактные множества (определение). Теорема об ограниченности слабо относительно компактного множества. Теорема о слабой относительной компактности ограниченного множества в рефлексивном пространстве (доказательство для гильбертова пространства).
1.6	Сопряженные операторы	Сопряженный оператор (определение для ограниченного оператора). Оператор Фредгольма с ядром, суммируемым с квадратом и сопряженный к нему в пространстве $L_2[a, b]$. Теорема о линейности и норме сопряженного оператора. Определение сопряженного оператора в гильбертовом пространстве.
1.7	Вполне непрерывные операторы	Вполне непрерывные операторы (определение). Теорема о множестве вполне непрерывных операторов. Теорема о вполне непрерывности оператора, определенного на конечномерном пространстве, или действующего в конечномерное пространство. Теорема о вполне непрерывности оператора, сопряженного к вполне непрерывному. Вполне непрерывные операторы и слабая сходимость (две леммы и теорема). Вполне непрерывность оператора Фредгольма с непрерывным ядром: из $C[a, b] \text{ в } C[a, b]$, из $L_2[a, b] \text{ в } C[a, b]$, из $L_2[a, b] \text{ в } L_2[a, b]$. Вполне непрерывность оператора Фредгольма с ядром, суммируемым с квадратом, из $L_2[a, b] \text{ в } L_2[a, b]$. Теория Рисса – Шаудера линейных уравнений второго рода. Лемма о множестве значений операторов $I - A$ и $I - A^*$.
1.8	Линейные уравнения второго рода	Первая, вторая и третья теоремы Фредгольма. Интегральные уравнения Фредгольма второго рода с вырожденными ядрами.
2. Практические занятия		
		Определение метрического пространства. Примеры. Шары. Ограниченные множества. Сходимости в метрических пространствах. Свойства сходящихся последовательностей. Непрерывность метрики по совокупности переменных. Примеры Полнота метрических пространств. Примеры полных пространств. Пример неполного пространства Точки прикосновения и замыкания множеств. Свойствах операции замыкания. Теорема о точки прикосновения множества. Предельной и изолированной точки. Замкнутые множества. Теорема об объединении и пересечении замкнутых множеств Внутренние точки. Операция взятия внутренности множества и ее свойства. Теорема о связи операций замыкания и взятия внутренности множества. Открытые множества. Теорема о связи открытости множества и замкнутости его дополнения. Теорема о свойствах открытых множеств.

2.1	Метрические пространства	Построение ограниченных открытых и замкнутых множеств на прямой
		Теорема о полноте подпространства. Теорема о вложенных шарах.
		Совершенные, плотные, всюду плотные, нигде не плотные множества. Теорема о пополнении
		Множества первой и второй категорий. Теорема Бэра.
		Сепарабельного пространства. Примеры сепарабельных и несепарабельных пространств
		Непрерывные отображения метрических пространств. Теорема об эквивалентности определений непрерывности через ε , δ и последовательности. Две теоремы о непрерывных функциях и прообразах открытых и замкнутых множеств.
		Условие Липшица и сжимающие отображения. Принцип сжимающих отображений (с оценкой погрешности). Применение принципа сжимающих отображений к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода.
		Относительно компактного и компактного множества. Теорема об ограниченности относительно компактного множества. Теорема Вейерштрасса.
		Вполне ограниченного множества. Теорема об ограниченности вполне ограниченного множества. Теорема Хаусдорфа
		Ограниченные, равномерно непрерывные, относительно компактные множества в $C[a,b]$ (теорема Арцела).
2.2	Линейные пространства	Линейное пространство (определение и простейшие свойства). Примеры линейных пространств.
		Выпуклое множество. Линейная зависимость и независимость элементов. Линейное многообразие
		Размерность линейного многообразия. Базис линейного многообразия. Прямая сумма линейных многообразий.
2.3	Нормированные пространства	Нормированное пространство. Определения и простейшие свойства. Примеры нормированных пространств.
		Ряды элементов нормированного пространства. Сходящиеся и абсолютно сходящиеся ряды.
		Эквивалентные нормы (определение и простейшие свойства). Теорема об эквивалентности норм в любом конечномерном нормированном пространстве.
		Замкнутость конечномерного линейного многообразия. Полнота конечномерного линейного пространства.
		Разрешимость интегральных уравнений Вольтерра второго рода.
		Компактность и конечномерность (лемма Рисса, теорема об относительной компактности всякого ограниченного множества в нормированном пространстве).
2.4	Пространства со скалярным произведением	Линейное пространство со скалярным произведением (определение). Неравенство Коши - Буняковского, норма, непрерывность скалярного произведения. Определение гильбертова пространства. Примеры пространств со скалярным произведением.
		Свойство ортогональности. Теорема о разложении элемента в сумму проекций.
		Теорема о плотности линейного многообразия в гильбертовом пространстве.
		Ортогональные системы элементов. Теорема об ортогональной системе в сепарабельном пространстве. Процесс ортогонализации Шмидта.
		Задача о наилучшей аппроксимации. Неравенство Бесселя и сходимости ряда Фурье.
		Замкнутая ортонормированная система элементов (определение, сходимости ряда Фурье). Теорема о полной ортонормированной системе элементов.
		Множества меры нуль. Ступенчатые функции, действия над ними.
2.5	Измеримые функции и множество C^+	Измеримые функции, действия над ними. Интегрирование ступенчатых функций. Свойства интеграла. Две леммы о последовательностях ступенчатых функций.
		Множество функций C^+ , действия над функциями из C^+ . Конечность почти всюду функций из C^+ .

		<p>Интеграл в множестве C^+. Простейшие свойства интеграла в C^+. Теорема о предельном переходе в C^+ под знаком интеграла. Следствие.</p> <p>Критерий интегрируемости по Риману функции $x(t)$ в терминах функций \underline{x} и \bar{x}, следствие. Теорема об интегрируемости функции по Риману в терминах последовательностей ступенчатых функций. Функции x, \tilde{x} и доказательство равенств почти всюду $x = \underline{x}$, $\tilde{x} = \bar{x}$. Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману</p>
2.6	Суммируемые функции и интеграл Лебега	<p>Суммируемые функции (определение). Действия над суммируемыми функциями.</p> <p>Интеграл в классе суммируемых функций (определение). Свойства интеграла. Лемма о представлении суммируемой функции. Теорема Беппо Леви, следствия 1 и 2.</p> <p>Теорема о связи несобственного интеграла Римана для неотрицательной функции с интегралом Лебега. Пример функции несобственно интегрируемой по Риману, но не суммируемой.</p> <p>Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла (три леммы). Следствия 1 и 2. Теорема Фату.</p>
2.7	Мера множества	<p>Определение измеримого множества и его меры. Простейшие свойства измеримых множеств. Теорема об объединении измеримых множеств, следствие для пересечения измеримых множеств. Теорема о мере объединения попарно не пересекающихся измеримых множеств. Теорема о мере объединения расширяющейся последовательности измеримых множеств. Следствие о мере объединения измеримых множеств. Следствие о мере пересечения убывающей последовательности измеримых множеств.</p> <p>Существование неизмеримого множества (множество Лузина). Структура измеримого множества положительной меры.</p>
2.8	Теория Лебега	<p>Внешняя мера множества. Теорема о внешней мере измеримого множества. Теорема об измеримости множества в терминах внешней меры. Определение измеримого множества по Лебегу в терминах внешней и внутренней меры.</p> <p>Функции, измеримые по Лебегу. Теорема о множествах функций, измеримых по Лебегу и по Риссу.</p> <p>Определение по Лебегу интеграла от ограниченной измеримой функции. Теорема о совпадении интеграла по Лебегу и интеграла по Риссу от ограниченной измеримой функции. Определение по Лебегу интеграла от неограниченной измеримой функции. Теорема о совпадении множества функций, интегрируемых по Риссу, с множеством функций, интегрируемых по Лебегу.</p>
2.9	Интегрирование по измеримому множеству. Обобщения на бесконечный промежуток и функции нескольких переменных	<p>Интегрирование по измеримому множеству. Простейшие свойства. Теорема об интегрировании по объединению измеримых множеств. Теорема о суммируемости неотрицательной функции на объединении измеримых множеств. Оценка интеграла по измеримому множеству. Теорема об абсолютной непрерывности интеграла Лебега.</p> <p>Случай бесконечного промежутка. Доказательство измеримости предела измеримых функций. Мера пересечения убывающей последовательности измеримых множеств.</p> <p>Случай функции двух независимых переменных. Теорема Фубини (без док-ва). Теорема о суммируемости по прямоугольнику функции, для которой существует один из повторных интегралов, два следствия.</p>
2.10	Пространства суммируемых функций	<p>Пространства $L_p[a, b]$. (определение и линейность для $0 \leq p < \infty$).</p> <p>Неравенство Гельдера. Норма для случая $1 \leq p < \infty$.</p> <p>Полнота пространства $L_p[a, b]$. Пространство $L_\infty[a, b]$ (определение и норма).</p>
2.11	Линейные ограниченные операторы	<p>Линейные операторы и функционалы (определения). Теорема о линейном операторе, непрерывном в одной точке. Ограниченный линейный оператор и теорема о связи ограниченности линейного оператора с его непрерывностью.</p> <p>Норма линейного ограниченного оператора (определение). Теорема о</p>

		вычислении нормы оператора.
		Пространство линейных ограниченных операторов. Теорема о полноте пространства линейных ограниченных операторов (в смысле равномерной сходимости).
		Сильная сходимость линейных операторов, связь с равномерной сходимостью.
		Теорема о продолжении линейного оператора по непрерывности на все пространство. Обратимый и обратный операторы (определения). Теорема о линейности обратного оператора.
2.12	Обратимые операторы	Условие обратимости линейного оператора. Условие обратимости линейного оператора и ограниченности обратного. Лемма об обратимости линейного оператора и обратном операторе. Непрерывно обратимый оператор (определение). Следствие о непрерывно обратимом операторе.
		Теорема Банаха о непрерывной обратимости оператора (две леммы и теорема).
		Резольвента линейного оператора и его спектр (определения). Теорема о регулярном множестве и представлении резольвенты, следствие для спектра. Теорема об открытости регулярного множества, следствие для спектра.
2.13	Замкнутые операторы	Замкнутые операторы (определение). Теорема о замкнутости ограниченного оператора.
2.14	Линейные ограниченные функционалы	Продолжение линейного ограниченного функционала – лемма и теорема Хана - Банаха.
		Общий вид линейных ограниченных функционалов в некоторых пространствах.
		Второе сопряженное пространство и рефлексивные пространства. Слабая сходимость элементов в нормированных пространствах (определение). Простейшие свойства: единственность слабого предела, связь со сходимостью по норме, ограниченность слабо сходящейся последовательности, оценка для нормы слабого предела.
2.15	Слабая сходимость элементов	Слабо полные пространства и теорема о слабой полноте рефлексивных пространств. Теорема о слабой сходимости в конечномерном пространстве. Слабо относительно компактные множества (определение). Теорема об ограниченности слабо относительно компактного множества. Теорема о слабой относительной компактности ограниченного множества в рефлексивном пространстве (доказательство для гильбертова пространства).
2.16	Сопряженные операторы	Сопряженный оператор (определение для ограниченного оператора). Оператор Фредгольма с ядром, суммируемым с квадратом и сопряженный к нему в пространстве $L_2[a, b]$. Теорема о линейности и норме сопряженного оператора. Определение сопряженного оператора в гильбертовом пространстве.
2.17	Вполне непрерывные операторы	Вполне непрерывные операторы (определение). Теорема о множестве вполне непрерывных операторов. Теорема о вполне непрерывности оператора, определенного на конечномерном пространстве, или действующего в конечномерном пространстве. Теорема о вполне непрерывности оператора, сопряженного к вполне непрерывному. Вполне непрерывные операторы и слабая сходимость (две леммы и теорема).
2.18	Линейные уравнения второго рода	Вполне непрерывность оператора Фредгольма с непрерывным ядром: из $C[a, b]$ в $C[a, b]$, из $L_2[a, b]$ в $C[a, b]$, из $L_2[a, b]$ в $L_2[a, b]$. Вполне непрерывность оператора Фредгольма с ядром, суммируемым с квадратом, из $L_2[a, b]$ в $L_2[a, b]$. Теория Рисса – Шаудера линейных уравнений второго рода. Лемма о множестве значений операторов $I - A$ и $I - A^*$.

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Лабораторные	Практические	Самостоятельная работа	Всего
1.	Метрические пространства			38	18	56

2.	Линейные пространства			4	4	8
3.	Нормированные пространства			16	9	25
4.	Пространства со скалярным произведением			10	9	19
5.	Измеримые функции и множество C^+			4	4	8
6.	Суммируемые функции и интеграл Лебега			3	2	5
7.	Мера множества			3	3	6
8.	Теория Лебега			2	4	6
9.	Интегрирование по измеримому множеству. Обобщения на бесконечный промежуток и функции нескольких переменных			2	3	5
10	Пространства суммируемых функций			2	4	6
11	Линейные ограниченные операторы	5		2	10	17
12	Обратимые операторы	4		2	8	14
13	Замкнутые операторы	4		2	6	12
14	Линейные ограниченные функционалы	4		2	10	16
15	Слабая сходимость элементов	4		2	6	12
16	Сопряженные операторы	5		2	6	13
17	Вполне непрерывные операторы	4		2	6	12
18	Линейные уравнения второго рода	4		2	6	12
19	Контроль					36
	Всего	34	0	100	118	288

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

При изучении дисциплины рекомендуется использовать следующие средства:

- рекомендуемую основную и дополнительную литературу;
- работа с конспектами лекций;
- методические указания и пособия;
- контрольные задания для закрепления теоретического материала;
- электронные версии учебников и методических указаний для выполнения практических работ.

Самостоятельная учебная деятельность студентов по дисциплине «Функциональный анализ» предполагает изучение рекомендуемой преподавателем литературы по вопросам лекционных и практических занятий (приведены выше), самостоятельное освоение понятийного аппарата и подготовку к текущим аттестациям (контрольным работам) (примеры см. ниже).

Вопросы лекционных и практических занятий обсуждаются на занятиях в виде устного опроса – индивидуального и фронтального. При подготовке к лекционным и практическим занятиям, обучающимся важно помнить, что их задача, отвечая на основные вопросы плана занятия и дополнительные вопросы преподавателя, показать свои знания и кругозор, умение логически построить ответ, владение математическим аппаратом и иные коммуникативные навыки, умение отстаивать свою профессиональную позицию. В ходе устного опроса выявляются детали, которые по каким-то причинам оказались недостаточно осмысленными студентами в ходе учебных занятий. Тем самым опрос выполняет важнейшие обучающую, развивающую и

корректирующую функции, позволяет студентам учесть недоработки и избежать их при подготовке к промежуточным аттестациям.

Все выполняемые студентами самостоятельно задания (выполнение контрольной работы) подлежат последующей проверке преподавателем. Результаты текущих аттестаций учитываются преподавателем при проведении промежуточной аттестации (4 семестр – зачет, 6 семестр – экзамен).

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Смагин, В.В. Линейные операторы и функционалы [Электронный ресурс] : учебное пособие для вузов / В.В. Смагин ; Воронеж. гос. ун-т .— Электрон. текстовые дан. — Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2011. — Свободный доступ из интрасети ВГУ. — Текстовый файл <URL: http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m11-200.pdf >.
2	Смагин, Виктор Васильевич. Действительный анализ [Электронный ресурс]: учебное пособие / В.В. Смагин; Воронеж. гос. ун-т .— Электрон. текстовые дан. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2015 .— Свободный доступ из интрасети ВГУ .— Текстовый файл .— <URL: http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m15-29.pdf >.
3	Смагин, Виктор Васильевич. Функциональные пространства. Вводный курс [Электронный ресурс]: учебное пособие для вузов / В.В. Смагин ; В.В. Смагин ; Воронеж. гос. ун-т .— Электрон. текстовые дан. — Воронеж : Воронежский государственный университет, Математический факультет, 2017 .— Свободный доступ из интрасети ВГУ .— Текстовый файл <URL: http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m17-92.pdf >.

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
1	Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа: учебное пособие для студ. мат. спец. ун-тов / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. — М. : Наука. — 1968. — 496 с.
2	Рисс, Ф. Лекции по функциональному анализу / Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь ; пер. с фр. Д.А. Василькова под ред. С.В. Фомина; ред. С.А. Теляковский .— Изд. 2-е, перераб. и доп. — М. : Мир, 1979 .— 587 с.
3	Соболев В.И. Лекции по дополнительным главам математического анализа. — М. : Наука. — 1968. — 288 с.
4	Шилов, Георгий Евгеньевич. Математический анализ. Второй специальный курс : учебное пособие для гос. ун-тов / Г.Е. Шилов .— М. : Наука, 1965 .— 327 с.
5	Треногин В.А. Функциональный анализ: учебник для студ., обуч. по специальностям "Математика" и "Прикладная математика" / В. А. Треногин. — Изд. 4-е, испр. — М.: Физматлит. — 2007. — 488 с.
6	Люстерник, Л.А. Краткий курс функционального анализа [Электронный ресурс] : учебное пособие / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. — Электрон. дан. — СПб.: Лань, 2009. — 272 с.

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)*:

№ п/п	Ресурс
1	Электронная библиотека ЗНБ ВГУ https://lib.vsu.ru/
2	Электронно-библиотечная система "Лань" https://e.lanbook.com/
3	Электронно-библиотечная система "Консультант студента" http://www.studmedlib.ru

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
-------	----------

1	Люстерник, Л.А. Краткий курс функционального анализа [Электронный ресурс]: учебное пособие / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. — Электрон. дан. — СПб.: Лань, 2009. — 272 с. — Режим доступа: http://lanbook.lib.vsu.ru/books/element.php?pl1_id=245
2	Смагин В.В. Метрические пространства. Пособие по курсу ``Функциональный анализ``. Специальность 010101 (010100) -- Математика // Воронеж. гос. ун-т. Воронеж. 2005. 35 с.
3	Положение об организации самостоятельной работы обучающихся в Воронежском государственном университете

17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ), электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):

При реализации учебной дисциплины проводятся различные типы лекций: вводная лекция, лекция-информация, лекция-диалог; а также практических занятий, на которых осуществляется решение задач и устные опросы по темам занятия.

Дисциплина может реализовываться с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий. При проведении занятий в дистанционной форме используются технические и информационные ресурсы Образовательного портала "Электронный университет ВГУ" (<https://edu.vsu.ru>), базирующегося на системе дистанционного обучения Moodle, развернутой в университете, а также другие доступные ресурсы в сети Интернет.

Самостоятельная работа регламентируется Положением об организации самостоятельной работы обучающихся в Воронежском государственном университете.

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Для проведения лекционных и практических занятий используются аудитории, оснащенные специализированной мебелью.

Для самостоятельной работы используется класс с компьютерной техникой, оснащенный необходимым программным обеспечением, электронными учебными пособиями и законодательно - правовой и нормативной поисковой системой, имеющий выход в глобальную сеть.

19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Разделы 1-4	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3	Контрольные работы 1-2
2.	Разделы 5-10	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3	Контрольная работа 3
3.	Разделы 11-18	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3	Контрольная работа 4
Промежуточная аттестация форма контроля – зачёт, экзамен				Перечень вопросов к зачёту и экзамену из п.20.2

20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1 Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств: контрольные работы

Комплект заданий для контрольной работы № 1

Вариант 1

Задание 1. Доказать полноту пространства s .

Задание 2. Показать, что в дискретном метрическом пространстве каждое множество открыто.

Задание 3. Доказать компактность всякого конечного множества в метрическом пространстве.

Задание 4. Пусть множества A и B ограничены в X – МП. Показать, что множество $A \cup B$ также ограничено в X .

Вариант 2

Задание 1. Может ли в метрическом пространстве шар радиуса 4 быть строгим подмножеством шара радиуса 3?

Задание 2. Доказать полноту пространства m .

Задание 3. Верно ли, что дополнение к всюду плотному множеству является нигде не плотным?

Задание 4. Доказать, что объединение конечного числа компактных множеств есть множество компактное.

Комплект заданий для контрольной работы № 2

Вариант 1

Задание 1 Доказать, что пересечение любой системы выпуклых множеств есть выпуклое множество.

Задание 2 Показать, что замыкание открытого шара в линейном нормированном пространстве есть соответствующий замкнутый шар.

Задание 3 Показать, что внутренность замкнутого шара в линейном нормированном пространстве есть соответствующий открытый шар.

Вариант 2

Задание 1 Доказать, что в линейном нормированном пространстве замыкание выпуклого множества есть выпуклое множество

Задание 2 Показать, что всякий шар в линейном нормированном пространстве есть выпуклое множество

Задание 3 Пусть A и B множества в линейном нормированном пространстве. Доказать, что если множества A и B ограничены, то множество $A+B$ ограничено.

Комплект заданий для контрольной работы №3.

Вариант 1

Может ли множество, имеющее хотя бы одну внутреннюю точку, быть множеством меры нуль?

Вариант 2

Привести пример суммируемой функции, квадрат которой не суммируем.

Комплект заданий для контрольной работы №4.

№1. Пусть X, Y – нормированные пространства. Выяснить, совпадает ли область определения $D(A) = \{x \in X \mid Ax \in Y\}$ оператора A с нормированным пространством X . Является ли оператор A линейным, непрерывным оператором из

$$D(A) \text{ в } Y? \quad X = L_2[0;1], Y = L_1[0;1], (Ax)(t) = |x(t)|.$$

№2. Доказать, что оператор $A: X \rightarrow Y$ является линейным ограниченным, и найти его

норму. $A: l_7 \rightarrow l_7, Ax = (0, 0, \frac{x(1)}{2}, \frac{x(2)}{2^2}, \dots, \frac{x(k)}{2^k}, \dots)$

№3. Для последовательности операторов $(A_n) \subset LB(X, Y)$, $X, Y \in Norm$ и $A \in LB(X, Y)$ установить: 1) сходится ли (A_n) поточечно (сильно) к оператору A ; 2) сходится ли (A_n) по норме к оператору A . $A_n x = (x(1), \dots, x(n), 0, 0, \dots), A = 1_{l_1}, X = Y = l_1$

№4. Пусть $A: X \rightarrow Y$. Доказать, что существует непрерывный обратный оператор A^{-1} , и построить его. $A: l_1 \rightarrow l_1, Ax = ((1 - \frac{1}{2})^2 x_1, (1 - \frac{1}{3})^3 x_2, (1 - \frac{1}{4})^4 x_3, \dots)$.

№5. Пусть E, F – ЛНП, A – замкнутый линейный оператор из E в F . Доказать, что множество нулей $N(A)$ оператора A является подпространством пространства E .

Описание технологии проведения

Текущая аттестация проводится в соответствии с Положением о текущей аттестации обучающихся по программам высшего образования Воронежского государственного университета.

Обучающийся получает комплект заданий контрольной работы и в течение двух академических часов должен предоставить преподавателю письменный ответ на задания контрольной работы. При этом обучающемуся запрещено пользоваться любыми вспомогательными ресурсами, как то: учебники, методические пособия, конспекты лекций и практических занятий, ресурсы сети Интернет.

Результаты текущих аттестаций учитываются преподавателем при проведении промежуточной аттестации (зачета).

В условиях применения электронного обучения и дистанционных образовательных технологий все выполняемые задания текущих аттестаций (контрольная работа) обучающиеся выставляют для проверки в личных кабинетах в электронном курсе на портале «Электронный университет ВГУ». – Moodle:URL:<http://www.edu.vsu.ru/>.

Требования к выполнению заданий (или шкалы и критерии оценивания)

Для оценивания результатов обучения на контрольной работе используются следующие показатели:

- 1) знание учебного материала и владение понятийным аппаратом;
- 2) умение связывать теорию с практикой;
- 3) умение применять полученные знания в практическом задании.

20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств: собеседование по билетам к зачёту и экзаменационным билетам, соответственно.

Перечень вопросов к зачету:

1. Неравенство Юнга для конечных сумм, неравенство Гельдера для конечных сумм.
2. Неравенство Гельдера для конечных сумм, неравенство Минковского для конечных сумм.
3. Применение принципа сжимающих отображений к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода.
4. Определения относительно компактного и компактного множества. Теорема об ограниченности относительно компактного множества. Теорема Вейерштрасса.
5. Свойство ортогональности (определения ортогональных элементов, элемента ортогонального множества, ортогонального дополнения). Теорема о разложении элемента в сумму проекций.
6. Ортогональная сумма подпространства. Формулировка теоремы о плотности линейного многообразия в гильбертовом пространстве.
7. Условие Липшица и сжимающие отображения (определения). Принцип сжимающих отображений (с оценкой погрешности).
8. Теорема Хаусдорфа.
9. Линейное пространство со скалярным произведением (определение, простейшие свойства).
10. Неравенство Коши-Буняковского, норма, свойство непрерывности скалярного произведения.
11. Определение гильбертова пространства. Примеры пространств со скалярным произведением.
12. Определение сходимости в метрических пространствах. Сходимость в пространствах $C[a,b]$, S .
13. Совершенные, плотные, всюду плотные, нигде не плотные множества (определения). Множества первой и второй категорий (определения и примеры). Теорема Бэра.
14. Линейные пространства (определение ЛП, простейшие свойства, примеры ЛП).
15. Теорема об относительной компактности множества в конечномерном ЛНП.
16. Определения точки прикосновения и замыкания множества. Теорема о свойствах операции замыкания множеств. Теорема о необходимом и достаточном условии для точки прикосновения множества.
17. Две теоремы о непрерывных функциях и прообразах открытых и замкнутых множеств.
18. Определения замкнутого отрезка и выпуклого множества. Линейная зависимость и независимость элементов. Линейное многообразие, линейная оболочка (определения, две леммы).
19. Формулировка теоремы об эквивалентности норм в конечномерном нормированном пространстве.
20. Замкнутость конечномерного линейного многообразия. Полнота конечномерного нормированного пространства.

Перечень вопросов к экзамену:

1. Линейные операторы и функционалы (определения).
2. Теорема о линейном операторе, непрерывном в одной точке.
3. Ограниченный линейный оператор и теорема о связи ограниченности линейного оператора с его непрерывностью.
4. Теорема об ограниченности линейного оператора, определенного на конечномерном пространстве.
5. Норма линейного ограниченного оператора (определение).
6. Теорема о вычислении нормы оператора.
7. Оператор Фредгольма в пространстве $C[a,b]$ и его норма.
8. Оператор дифференцирования в $C[a,b]$ и из $C^1[a,b]$ в $C[a,b]$.
9. Пространство линейных ограниченных операторов.
10. Теорема о полноте пространства линейных ограниченных операторов (в смысле равномерной сходимости). Следствие для сопряженного пространства.
11. Произведение линейных операторов.

12. Сильная сходимости линейных операторов, связь с равномерной сходимостью.
13. Принцип равномерной ограниченности (лемма и теорема).
14. Теорема о полноте пространства линейных ограниченных операторов (в смысле сильной сходимости).
15. Теорема о продолжении линейного оператора по непрерывности на все пространство. Обратимый и обратный операторы (определения).
16. Теорема о линейности обратного оператора.
17. Условие обратимости линейного оператора. Условие обратимости линейного оператора и ограниченности обратного.
18. Лемма об обратимости линейного оператора и обратном операторе.
19. Непрерывно обратимый оператор (определение). Следствие о непрерывно обратимом операторе.
20. Теорема Банаха о непрерывной обратимости оператора (две леммы и теорема).
21. Резольвента линейного оператора и его спектр (определения).
22. Теорема о регулярном множестве и представлении резольвенты, следствие для спектра.
23. Теорема об открытости регулярного множества, следствие для спектра.
24. Замкнутые операторы (определение). Теорема о замкнутости ограниченного оператора.
25. Замкнутость оператора дифференцирования в $C[a, b]$.
26. Теорема о замкнутости оператора, обратного к замкнутому, следствие для непрерывно обратимого оператора.
27. Декартово произведение линейных нормированных пространств (линейные операции, норма и полнота). График линейного оператора.
28. Лемма о графике замкнутого оператора.
29. Теорема о замкнутом операторе, определенном на всем пространстве.
30. Продолжение линейного ограниченного функционала – лемма и теорема Хана - Банаха (доказательство для сепарабельного вещественного пространства).
31. Три следствия.
32. Лемма о биортогональных системах.
33. Общий вид линейных ограниченных функционалов в пространствах: конечномерном, l_p ($1 < p < \infty$), гильбертовом, $L_p[a, b]$ ($1 < p < \infty$) (случай $p \neq 2$ без доказательства).
34. Второе сопряженное пространство и рефлексивные пространства.
35. Слабая сходимости элементов в нормированных пространствах (определение). Простейшие свойства: единственность слабого предела, связь со сходимостью по норме, ограниченность слабо сходящейся последовательности, оценка для нормы слабого предела.
36. Слабо полные пространства и теорема о слабой полноте рефлексивных пространств.
37. Теорема о слабой сходимости в конечномерном пространстве. Слабо относительно компактные множества (определение).
38. Теорема об ограниченности слабо относительно компактного множества.
39. Теорема о слабой относительной компактности ограниченного множества в рефлексивном пространстве (доказательство для гильбертова пространства).
40. Сопряженный оператор (определение для ограниченного оператора).
41. Оператор Фредгольма с ядром, суммируемым с квадратом и сопряженный к нему в пространстве $L_2[a, b]$.
42. Теорема о линейности и норме сопряженного оператора.
43. Определение сопряженного оператора в гильбертовом пространстве.
44. Вполне непрерывные операторы (определение). Теорема о множестве вполне непрерывных операторов.
45. Теорема о вполне непрерывности оператора, определенного на конечномерном пространстве, или действующего в конечномерное пространство.
46. Теорема о вполне непрерывности оператора, сопряженного к вполне непрерывному.
47. Вполне непрерывные операторы и слабая сходимости (две леммы и теорема).
48. Вполне непрерывность оператора Фредгольма с непрерывным ядром: из $C[a, b]$ в $C[a, b]$, из $L_2[a, b]$ в $C[a, b]$, из $L_2[a, b]$ в $L_2[a, b]$.

Описание технологии проведения

Промежуточная аттестация проводится в соответствии с Положением о промежуточной аттестации обучающихся по программам высшего образования.

Контрольно-измерительные материалы промежуточной аттестации включают в себя теоретические вопросы, позволяющие оценить уровень полученных знаний и степень сформированности умений и(или) навыков.

Требования к выполнению заданий (или шкалы и критерии оценивания)

Критерии оценивания компетенций	Шкала оценок
Зачёт	
Обучающийся знает основные определения, теоремы. Умеет применять их к практическим заданиям. Обучающийся дает правильные ответы на дополнительные вопросы.	<i>Зачтено</i>
Обучающийся демонстрирует отрывочные, фрагментарные знания (либо их отсутствие) основных понятий, определений и теорем, используемых в курсе, не дает правильные ответы на дополнительные вопросы.	<i>Не зачтено</i>
Экзамен	
Обучающийся в полной мере использует фундаментальные знания в области математического анализа, функционального анализа и других дисциплин, способен к определению общих форм и закономерностей отдельной данной предметной области умеет строго доказать утверждения, формулировать результаты, быстро видит следствия полученного результата	<i>Отлично</i>
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует одному из перечисленных показателей, но обучающийся дает правильные ответы на дополнительные вопросы	<i>Хорошо</i>
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует любым двум-трём из перечисленных показателей, обучающийся дает неполные ответы на дополнительные вопросы, демонстрирует частичные знания,	<i>Удовлетворительно</i>
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует четырем из перечисленных показателей. Обучающийся демонстрирует отрывочные, фрагментарные знания, допускает грубые ошибки.	<i>Неудовлетворительно</i>

20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ

ОПК-1 Способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики и механики

ОПК-1.1 Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук

Знать:

- актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики и механики.

Уметь:

- использовать базовые знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, в профессиональной деятельности.

Владеть:

- навыками выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.

ОПК-1.2 Умеет использовать базовые знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, в профессиональной деятельности

Знать:

- актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики и механики.

Уметь:

- использовать базовые знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, в профессиональной деятельности.

Владеть:

- навыками выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.

ОПК-1.3 Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний

Знать:

- актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики и механики.

Уметь:

- использовать базовые знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, в профессиональной деятельности.

Владеть:

- навыками выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.

Перечень заданий для оценки сформированности компетенции:

1) закрытые задания (тестовые, средний уровень сложности):

1. Установите соответствие между метрическим пространством и метрикой, заданной на нём.

1	$C[a, b]$	а	$\rho(x, y) = \max_{1 \leq k \leq n} x_k - y_k $
2	\mathbb{R}_p^n	б	$\rho(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} x(t) - y(t) $
3	$l_p (1 \leq p < \infty)$	в	$\rho(x, y) = \left(\sum_{k=1}^n x_k - y_k ^p \right)^{1/p}$
4	\mathbb{R}_∞^n	г	$\rho(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k - y_k ^p \right)^{1/p}$

Ответ: 1-б, 2-в, 3-г, 4-а

Решение: задание на знание определения метрик в различных пространствах

2. Установить соответствие между обозначением метрического пространства и его словесным описанием

1	$C[a, b]$	а	пространство n-мерных векторов с вещественными координатами
2	\mathbb{R}_p^n	б	пространство непрерывных на отрезке [a,b] функций
3	$l_p (1 \leq p < \infty)$	в	пространство n-мерных векторов с комплексными координатами
4	\mathbb{C}_∞^n	г	пространство числовых последовательностей, суммируемых с p-ой степенью

Ответ: 1-б, 2-а, 3-г, 4-в

Решение: задание на знание обозначений основных пространств в функциональном анализе

3. Установите соответствие между началом и концом определения.

1	Множество называется открытым, если	а	его замыкание совпадает со всем пространством.
2	Множество называется ограниченным, если	б	существует замкнутый шар, содержащий это множество.

3	Множество называется всюду плотным, если
4	Множество называется замкнутым, если

в	оно совпадает со своим замыканием.
г	оно совпадает со своей внутренностью.

Ответ: 1-г, 2-б, 3-а, 4-в

Решение: вопрос на знание соответствующих определений.

4. Установите соответствие между пространством со скалярным произведением и скалярным произведением, заданным на нём.

1	$C_2[a, b]$
2	\mathbb{R}_2^n
3	l_2
4	\mathbb{C}_2^n

а	$(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$
б	$(x, y) = \int_a^b x(t)y(t)dt$
в	$(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k \bar{y}_k$
г	$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k$

Ответ: 1-б, 2-а, 3-г, 4-в

Решение: задание на знание определения скалярного произведения в различных пространствах.

5. Установите соответствие между началом и концом определения.

1	Множество называется относительно компактным, если
2	Множество называется ограниченным, если
3	Множество называется компактным, если
4	Множество называется вполне ограниченным, если

а	$\forall(\varepsilon > 0)$ для этого множества существует конечная ε –сетть.
б	из каждой последовательности его элементов можно выделить сходящуюся подпоследовательность.
в	существует замкнутый шар, содержащий это множество.
г	оно относительно компактно и замкнуто.

Ответ: 1-б, 2-в, 3-г, 4-а.

Решение: вопрос на знание соответствующих определений.

2) открытые задания (тестовые, повышенный уровень сложности):

1. Как называется нормированное пространство, полное в смысле сходимости по норме?

Ответ: банахово пространство (банахово)

Решение: здесь приведено определение банахова пространства

2. Как называется пространство со скалярным произведением, полное по норме, порождённой скалярным произведением?

Ответ: гильбертово пространство (гильбертово)

Решение: здесь приведено определение гильбертова пространства

3. Вставьте одно слово: «Множество, которое содержит все свои точки прикосновения, называется _____».

Ответ: замкнутым (замкнутое)

Решение: здесь приведено определение замкнутого множества

4. Вставьте одно пропущенное слово: «Множество, каждая точка которого является _____, называется открытым».

Ответ: внутренней

Решение: здесь приведено определение открытого множества

5. Вставьте 3 пропущенных слова: «Метрическое пространство называется сепарабельным, если в нём существует _____ _____ _____ множество».

Ответ: счётное всюду плотное (всюду плотное счётное)

или, если не использовать «ё»: счетное всюду плотное, всюду плотное счетное

Решение: здесь приведено определение сепарабельного пространства

Критерии и шкалы оценивания заданий ФОС:

Для оценивания выполнения заданий используется балльная шкала:

1) закрытые задания (тестовые, средний уровень сложности):

- 1 балл – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ (полностью или частично неверный).

2) открытые задания (тестовые, повышенный уровень сложности):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ (полностью или частично неверный).

Задания раздела 20.3 рекомендуются к использованию при проведении диагностических работ с целью оценки остаточных результатов освоения данной дисциплины (знаний, умений, навыков).